(((بسم ألله الرحمن الرحيم)))

الفصل الاول من ملزمة الرياضيات

إعداد الاستاذ:- حسين الحمداني

ألرفع التشبكي : قناة وصفحة مسيرتي في السادس

تابعونا على ألتليكرام عبر المعرف
@T_S_M

وعلى الفيس بوك بعنوان مسيرتي في السادس

* مسيرتي في السادس طريقك الى النجاح *

الأعداد المركبه C

ان العدد المركب هو العدد الذي يتكون من جزئين حقيقي وتخيلي وسنرمز للتخيلي بالرمز (i)

حيث ان ✧

$$i = \sqrt{-1}$$
$$i^2 = -1$$
$$i^3 = -i$$
$$i^4 = 1$$
$$i^{\text{مضاعفات}4} = 1$$

==

مثال:-جد ناتج

1) $i^{537} = i$
2) $i^{782} = i^2 = -1$
3) $i^{578} = i^2 = -1$
4) $i^{839} = i^3 = -i$
5) $i^{957} = i$
6) $i^{567} = i^3 = -i$

وها العدد يمكن كتابته بثلاث صيغ وهي

1) الصيغه العاديه a+bi
2) الصيغه الديكارتيه (a,b)
3) الصيغه القطبيه $r(cos\theta + isin\theta)$

س:- اكتب مايأتي بالصيغه العاديه (a+bi)

1) 3-5i =3 + (-5)i
2) 4i =0 + 4i
3) 3 =3 + oi
4) $3 + \sqrt{-7}$
$=3+\sqrt{7}i$

الجزء الاول

1)الاساسيات

a) الجمع والطرح :- في الجمع والطرح نأخذ الحقيقي مع الحقيقي والتخيلي مع التخيلي

مثال:-اكتب بالصيغه a+bi ناتج مايلي

تذكر:- في الطرح تتوزع الاشاره السالبه على القوس الي يليه

1) (3 + 2i) + (4 – 7i)
=7 – 5i

2) (4 – 3i) – (2 – 5i)
=4 – 3i – 2 +5i
=2 + 2i

3) (3 – 4i) – (5+ 9i)
=3 – 4i – 5 – 9i
= -2 – 13i

===

b) الضرب :- نستخدم قاعدة التوزيع

مثال:- جد ناتج :-

تذكر:- i^2 هي (-1) اي ان كل i^2 نعوض عنها (-1) فتغير اشارت العدد الي يتبعه

1) (3 + 2i) (1 – 4i)
$=3 - 12i + 2i - 8i^2$
=3- 12i + 2i + 8
=11 – 10i

2) (2 – i) (3+ i)
$=6 +2i - 3i - i^2$
=7- i

3) (5 + 4i) (2 – 5i)
$=10 - 25i + 8i - 20i^2$
=30 – 17i

===

من معلوماتك السابقه ان كل قوس له اس هو قفل مغلق لايمكن فتحه عدا القوس التربيعي فان مفتاحه (مربع الحدانيه) وقانونها

$(\quad)^2 =$ الاول^2 + 2.الاول.الثاني اشارت الوسط + الثاني^2

س :—جد ناتج $(1+i)^2$

$=1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$

اذا كان اس القوس اكثر من 2 فنجزء القوس وبحسب الاس

الاس الزوجي $((\ )^2)$ او يجزء قوسين $(\ )^2(\ )^2$ وهكذا

الاس الفردي $(\ )^{\text{زوجي}}(\ )$

س:- جد ناتج

$(1+i)^4 = (1+i)^2(1+i)^2$

$= (1 + 2i + i^2)(1 + 2i + i^2)$

$=(2i)(2i)$

$=4i^2 \rightarrow -4$

==

طريقه اخرى للحل

$(1+i)^4 = ((1+i)^2)^2$

$= (1+2i+i^2)^2$

$=(2i)^2$

$=4i^2$

$= -4$

==

س :- جد ناتج

$(1-i)^5 = (1-i)^2(1-i)^2(1-i)$

$= (1 - 2i + i^2)(1 - 2i + i^2)(1-i)$

$=(-2i)(-2i)(1-i)$

$=4i^2(1-i)$

$= -4(1-i)$

$= -4 + 4i$

==

طريقه اخرى للحل

$(1-i)^5 = ((1-i)^2)^2(1-i)$

$= (-2i)^2(1-i)$

$= 4i^2(1-i) \Longrightarrow = -4(1-i)$

$= -4 + 4$

==

س:- جد ناتج

$(1-i)^6 = ((1-i)^2)^3$
$=(1-2i+i^2)^3$
$=(-2i)^3 \rightarrow = -8i^3$
$= 8i$

اعلم ان الاس الزوجي يحذف الاشاره السالبه
والفردي يحتفظ بها وان i^3 هو i-

==

س:- جد ناتج

$(1+i)^7 = ((1+i)^2)^3(1+i)$
$=(1+2i+i^2)^3(1+i)$
$=(2i)^3(1+i)$
$=8i^3(1+i)$
$=-8i(1+i)$
$=-8i-8i^2$
$= 8-8i$

==

س:- جد ناتج

$\frac{(1+i)^{13}}{64} = \frac{(1+i)^{12}(1+i)}{64}$
$= \frac{((1+i)^2)^6(1+i)}{64}$

$= \frac{(2i)^6(1+i)}{64}$
$= \frac{64i^6(1+i)}{64}$
$= i^6(1+i)$
$= -1(1+i)$
$= -1- i$

جد ناتج (واجب)
$\frac{(1+i)^{13}}{32}$

س :- جد ناتج

$$\frac{(1-i)^{17}}{64}=\frac{(1-i)^{16}(1-i)}{64}$$
$$=\frac{\left((1-i)^2\right)^8(1-i)}{64}$$
$$=\frac{\left(1-2i+i^2\right)^8(1-i)}{64}$$
$$=\frac{(-2i)^8(1-i)}{64}$$
$$=\frac{256i^8(1-i)}{64}$$
$=4(1-i)$
$=4-4i$

===

3) الترافق :- يقال ان العددان مترافقان اذا اختلفا في اشارة الجزء التخيلي فقط
سنرمز الى مرافق العدد (c) بالرمز ($\bar{c}$)
☆أ) ضرب المترافقين يعطي مجموع مربعي المعاملين (دون ذكر i)
ب) اذا وجدنا (i) في المقام فعلينا التخلص منه بضرب البسط والمقام بمرافق المقام

س :- جد ($\bar{c}$) لكل ماياتي

1) C=3+4i $\rightarrow \bar{c}=3-4i$
2) C=7i $\rightarrow \bar{c}=-7i$
3) C=4 $\rightarrow \bar{c}=4$

===

س:- جد ناتج

1) (2-3i)(2+3i)
$=2^2+3^2$
=4+9=13
2) (6+i)(6- i)
$=6^2+1^2$
=36+1=37

===

س :- جد ناتج

1) $\frac{(2+2i)}{(1-i)}$
$=\frac{(2+2i)}{(1-i)}\cdot\frac{(1+i)}{(1+i)}$
$=\frac{2+2i+2i+2i^2}{1^2+1^2}$

$=\frac{2+2i+2i-2}{2}$

$=\frac{4i}{2}=2i$

---

2) $\frac{(4+4i)}{(1+i)}$

$=\frac{(4+4i)}{(1+i)}\cdot\frac{(1-i)}{(1-i)}$

$=\frac{(4-4i+4i-4i^2)}{1^2+1^2}$

$=\frac{(4-4i+4i+4)}{1+1}$

$=\frac{8}{2}=4$

---

3) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3$

$=\left(\frac{1+i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}\right)^3$

$=\left(\frac{1+i+i+i^2}{1^2+1^2}\right)^3$

$=\left(\frac{2i}{2}\right)^3$

$=(i)^3=-i$

---

4) $(1-i)(1-i^2)(1-i^3)$

$=(1-i)(1+1)(1+i)$

$=2(1^2+1^2)$

$=2(2)$

$=4$

---

5) $\frac{1}{(2-i)^2}-\frac{1}{(2+i)^2}$

توحيد المقامات بشكل سريع المقام حاصل ضرب المقامين
والبسط حاصل ضرب الطرفين في الوسطين

$=\frac{1}{4-4i+i^2}-\frac{1}{4+4i+i^2}$

$=\frac{1}{4-4i-1}-\frac{1}{4+4i-1}$

$=\frac{1}{3-4i}-\frac{1}{3+4i}$

$=\frac{1\cdot(3+4i)-1\cdot(3-4i)}{(3-4i)(3+4i)}$

$=\frac{3+4i-3+4i}{((3)^2+(4)^2)}$

$=\frac{8i}{25}$

---

6) $\left(\frac{(1-i)^7}{1+i}\right)^7$

$=\left(\frac{(1-i)^6(1-i)}{1+i}\right)^7$

$=\left(\frac{\left((1-i)^2\right)^3(1-i)}{1+i}\right)^7$

$=\left(\frac{\left(1-2i+i^2\right)^3(1-i)}{1+i}\right)^7$

$=\left(\frac{(-2i)^3(1-i)}{1+i}\right)^7$

$=\left(\frac{-8i^3(1-i)}{1+i}\right)^7$

$=\left(\frac{8i(1-i)}{1+i}\right)^7$

$=\left(\frac{8i-8i^2}{1+i}\right)^7$

$=\left(\frac{8+8i}{1+i}\right)^7$

$=\left(\frac{(8+8i)}{(1+i)}\cdot\frac{(1-i)}{(1-i)}\right)^7$

$=\left(\frac{8-8i+8i-8i^2}{1^2+1^2}\right)^7$

$=\left(\frac{16}{2}\right)^7=(8)^7$

7) اذا كان $c1(7-4i)\ c2(2-3i)$ فتحقق من

$$\overline{\left(\frac{c1}{c2}\right)}=\frac{\overline{c1}}{\overline{c2}}$$

$$\overline{\left(\frac{7-4\imath}{2-3\imath}\right)}=\overline{\left(\frac{7-4\imath}{2-3\imath}\cdot\frac{2+3\imath}{2+3\imath}\right)}=\overline{\left(\frac{14+21\imath-8\imath-12\imath^2}{13}\right)}=\overline{\left(\frac{26+13\imath}{13}\right)}$$

$$=\overline{2+\imath}=2-i$$

$$\frac{\overline{7-4\imath}}{\overline{2-3\imath}}=\frac{7+4i}{2+3i}=\frac{7+4i}{2+3i}\cdot\frac{2-3i}{2-3i}=\frac{14-21i+8i-12i^2}{13}=\frac{26-13i}{13}=2-i$$

4) اذا طلب في السؤال تحليل عدد صحيح موجب الى عاملين بصيغة (a+bi) حيث a ,b نسبي
خطوات الحل
أ) نكتب العدد بشكل مجموع عددين لهما جذر
ب) لتحويل مجموع المربعين الى فرق بين مربعين نحول الجمع الى طرح ونضع i^2 للعدد الثاني
ت) نحلل فرق بين مربعين

س :- حلل الاعداد الاتيه الى عاملين بصيغة a+bi

الحل/

1)29 =25+4
$=25-4i^2$
$=(5-2i)(5+2i)$
2)20=16+4
$=16-4i^2$
$=(4-2i)(4+2i)$
3)41= 25+16
$=25-16i^2$
$=(5-4i)(5+4i)$

4)52= 36 +16
$=36-16i^2$
$=(6-4i)(6+4i)$

5)89 = 64+25
$=64-25i^2$
$=(8-4i)(8+5i)$

6)148 =144+4
$=144-4i^2$
$=(12-2i)(12+2i)$

5) ايجاد قيم x,y الحقيقيه:-
خطوات الحل
أ)نتخلص من عمليتي الضرب والقسمه
ب)بعد التخلص من الضرب والقسمه نساوي الحقيقي مع الحقيقي والتخيلي مع التخيلي فنحصل على معادلتين نحلهما انيا بطريقة الحذف او التعويض (من معلومات الثالث المتوسط)

س :- جد قيمة x,y الحقيقية اذا علمت ان

$$y + 5i = (x + 2i)(2x + i)$$

الحل/

$y + 5i = 2x^2 + xi + 4xi + 2i^2$
$y + 5i = 2x^2 + 5xi - 2$
$y = 2x^2 - 2 \cdots\cdots (1)$
$5=5x \quad \cdots\cdots (2)$
$x = \frac{5}{5}$
$x = 1$ نعوض في معادله (1)
$y = 2(1)^2 - 2$
$y = 2 - 2$
$y = 0$

س :- جد قيمة الحقيقيتين x,y اذا علمت ان

$$8i = (x + 2i)(y + 2i) + 1$$

الحل/

$8i = xy + 2xi + 2yi + 4i^2 + 1$
$8i = xy + 2xi + 2yi - 4 + 1$
$0 = xy - 3 \quad \cdots\cdots (1)$
$8=2x + 2y$
$xy = 3$ من معادله (1)
$y = \frac{3}{x}$ نعوض في معادلة (2)
$8=2x + 2\left(\frac{3}{x}\right)$ ضرب الطرفين ب (x)
$8x = 2x^2 + 6$
$2x^2 - 8x + 6 = 0$
$(2x - 6)(x - 1) = 0$
اما $2x = 6$
$x = 3 \Longrightarrow y = \frac{3}{3} = 1$

$x = 1$ او $\Longrightarrow$ $y = \frac{3}{1} = 3$

س :- جد قيمة x,y الحقيقيتين اذا علمت ان

$$\frac{1-i}{1+\text{i}} + x + yi = (1+2i)^2$$

الحل/

$$\left(\frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}\right) + x + yi = 1 + 4i + 4i^2$$
$$=\left(\frac{1-i-i+i^2}{1^2+1^2}\right) + x + yi = 1 + 4i - 4$$
$$=\frac{-2i}{2} + x + yi = -3 + 4i$$
$$=-i + x + yi = -3 + 4i$$
$$x = -3 \quad \cdots\cdots (1)$$
$$-1 + y = 4 \quad \cdots (2) \quad \rightarrow y = 5$$

س :- جد قيمة x,y الحقيقيه اذا علمت ان

$$\frac{2-i}{1+i}x + \frac{3-i}{2+i}y = \frac{1}{i}$$

الحل /

اعلم ان قيمة i في المقام هي $-i$ في البسط

$$=\left(\frac{2-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}\right)x + \left(\frac{3-i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i}\right)y = \frac{1}{i} \cdot \frac{0-i}{0-i}$$
$$=\left(\frac{2-2i-i+i^2}{(1)^2+(1)^2}\right)x + \left(\frac{6-3i-2i+i^2}{(2)^2+(1)^2}\right)y = \frac{-i}{-i^2}$$
$$=\left(\frac{2-3i-1}{1+1}\right)x + \left(\frac{6-5i-1}{4+1}\right)y = \frac{-i}{-(-1)}$$
$$=\left(\frac{1-3i}{2}\right)x + \left(\frac{5-5i}{5}\right)y = -i$$
$$\left(\frac{1}{2} - \frac{3i}{2}\right)x + (1-i)y = -i$$
$$=\frac{1}{2}x + y = 0 \quad \cdots\cdots (1)$$
$$=-\frac{3}{2}x - y = -1 \quad \cdots\cdots (2)$$

بالجمع

$$=-\frac{2}{2}x = -1$$
$$=-x = -1$$

$x = 1 \quad \cdots\cdots$ نعوض في (1)

$$=\frac{1}{2}(1) + \text{y} = 0$$
$$y = -\frac{1}{2}$$

اذا اعطى في السؤال ان العددان مترافقان فنساويهما ونضع علامة الترافق على احدهما

س :- جد قيم $x\ y$ الحقيقية اذا علمت ان $\frac{x-yi}{1+5i}$, $\frac{3-2i}{i}$ مترافقان

الحل/

$$\overline{\left(\frac{x-yi}{1+5i}\right)}=\frac{3-2i}{i}$$
$$\frac{x+yi}{1-5i}=\frac{3-2i}{i}$$
$$(3-2i)(1-5i)=(x+yi)(i)$$
$$3-15i-2i+10i^2=xi+yi^2$$
$$3-15i-2i-10=xi-y$$
$$-7-17i=xi-y$$
$$-y=-7$$
$$y=7$$
$$x=-17$$

س :- جد قيم x, y الحقيقية اذا علمت ان $\frac{6}{x+yi}$, $\frac{3+i}{2-i}$ مترافقان

الحل /

$$\frac{\overline{3+i}}{\overline{2-i}}=\frac{6}{x+yi}$$
$$\frac{3-i}{2+i}=\frac{6}{x+yi}$$
$$(3-i)(x+yi)=(2+i)(6)$$
$$3x+3yi-xi-yi^2=12+6i$$
$$3x+y=12 \quad \cdots\cdots(1)$$
$$3y-x=6 \quad \cdots\cdots(2) \qquad *3$$
$$9y-3x=18 \quad \cdots\cdots(2)$$

$$3x+y=12 \quad \cdots(1)$$
$$9y-3x=18 \quad \cdots(2)$$

$10y=30$ بالجمع

$y=3$ نعوض في (1)

$$3x+3=12$$

$3x = 12 - 3$

$x = \frac{9}{3} = 3$

==========

س(تمارين عامه) :- جد قيمة x , y اذا علمت ان

$$\frac{x^2 + 4}{x + 2i} = \frac{y}{1 + i}$$

الحل/

$=\left(\frac{y}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}\right) = \frac{x^2-4i^2}{x+2i}$

$=\left(\frac{y-yi}{2}\right) = \frac{(x-2i)(x+2i)}{(x+2i)}$

$=\frac{y-yi}{2} = (x - 2i)$

$=y - yi = 2x - 4i$

$=y = 2x \quad \cdots\cdots (1)$

$=-y = -4 \quad \cdots\cdots (2) \rightarrow \quad y = 4$ نعوض في (1)

$=4 = 2x \quad (1)$

$x = \frac{4}{2}$

$x = 2$

نحول البسط الى فرق بين مربعين
حتى لاتصبح معادله من الدرجه
الثانيه بأحتوائها على x^2

==========

س :- جد قيمة x,y الحقيقيه اذا علمت ان $\frac{y}{1+i} = \frac{x^2+9}{x-3i}$

الحل

$$\frac{y}{1 + i} \cdot \frac{1 - i}{1 - i} = \frac{(x^2 - 9i^2)}{x - 3i}$$

$$\frac{y - yi}{(1)^2 + (1)^2} = \frac{(x - 3i)(x + 3i)}{(x - 3i)}$$

$\frac{y - yi}{2} = (x + 3i)$

$y - yi = 2x + 6i$

$y = 2x \quad \cdots\cdots (1)$

$-y = 6 \quad \cdots\cdots (2) \rightarrow y = -6$ نعوض في (1)

$-6 = 2x$

$x = \frac{-6}{2}$

$x = -3$

==========

الجزء الثاني

أ)الجذور التربيعيه

ب)المعادلات التربيعيه

أ)الجذور التربيعية :- ويختص هذا الموضوع بأيجاد الجذور التربيعيه للأعداد التي المركبه (التي فيها i)

خطوات الحل :-

1) نفرض $x+yi=\sqrt{\cdots}$

2) تربيع الطرفين $x^2+2xy-y^2=$

$x^2-y^2=\cdots \quad (1)$

$2xy=\cdots (2)\rightarrow y=\frac{\cdots}{2x}$ نعوض في(1)

3)نجد قيمة (x,y) ونقول ان :-

الجذر $\mp(x+yi)$

س: - جد الجذور التربيعية للعدد $8i$ ؟

الحل /

$x+yi=\sqrt{8i}$

$x^2+2xyi-y^2=8i$

$x^2-y^2=0 \qquad (1)$

$2xy=8 \qquad (2)$

$y=\frac{8}{2x} \rightarrow y^2=\frac{64}{4x^2}\rightarrow y^2=\frac{16}{x}$ نعوض في (1)

$x^2-\frac{16}{x^2}=0 \qquad \cdot x^2$

$x^4-16=0$

$x^4=16 \rightarrow x=\mp 2$

اما$x=2 \rightarrow y=\frac{8}{2(2)}$

$y=2$

او$x=\rightarrow y=\frac{8}{2(-2)}$

$y=-2$ الجذور $\mp(2+2i)$

س: - جد الجذور التربيعية للعدد $(-6i)$

الحل /

$x+yi=\sqrt{-6i}$

بالتربيع

$x^2+2xyi-y^2=-6i$

$x^2-y^2=0 \qquad (1)$

$2xy=-6 \qquad (2)$

$y=\frac{-6}{2x} \quad \to y=\frac{-3}{x} \quad \to y^2=\frac{9}{x^2}$ (1) نعوض في

$x^2-\left(\frac{9}{x^2}\right)=0 \qquad \cdot x^2$

$x^4-9=0$

$x^4=9 \to \quad x=\mp\sqrt{3}$

اما $x=\sqrt{3} \quad \to \quad y=\frac{-3}{\sqrt{3}}=-\sqrt{3}$

واو $x=-\sqrt{3} \to y=\frac{-3}{-\sqrt{3}} \to y=+\sqrt{3}$

الجذور $\mp(\sqrt{3}-\sqrt{3}i)$

==

س: - جد الجذور التربيعية للعدد $-i$

الحل /

$x+yi=\sqrt{-i}$

$x^2+2xyi-y^2=-i$

$x^2-y^2=0 \qquad (1)$

$2xy=-1 \qquad (2)$

$y=\frac{-1}{2x} \to \quad y^2=\frac{1}{4x^2}$ (1) نعوض في

$x^2-\frac{1}{4x^2}=0 \qquad \cdot 4x^2$

$4x^4-1=0 \quad \to 4x^4=1 \quad \to x^4=\frac{1}{4}$

$x=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}$

اما $x=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \to y=\frac{-1}{2(\frac{1}{\sqrt{2}})}$

$y=\frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}} \to \mathrm{y}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$x = \rightarrow y = \frac{-1}{2(\frac{1}{\sqrt{2}})} \rightarrow y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

الجذور $\mp\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

س: - جد الجذور التربيعية للعدد 8+6i

الحل /

$x + yi = \sqrt{8 + 6\text{i}}$

$x^2 + 2xyi - y^2 = 8+6\text{i}$

$x^2 - y^2 = 8 \quad (1)$

$2xy = 6 \quad (2)$

$y = \frac{6}{2x} \rightarrow y = \frac{3}{x} \rightarrow y^2 = \frac{9}{x^2}$ نعوض في (1)

$x^2 - \left(\frac{9}{x^2}\right) = 8 \quad \cdot x^2$

$x^4 - 9 = 8x^2$

$x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

$(x^2 - 9)(x^2 + 1) = 0$ يهمل

$x^2 = 9 \rightarrow x = 3$

اما $x = 3 \rightarrow y = \frac{3}{3} \quad y = 1$

$x = \rightarrow y = \frac{3}{-3} \rightarrow y = -1$

الجذور $\mp(3 + i)$

س: - جد الجذور التربيعية للعدد 7+24i

الحل /

$x + yi = \sqrt{7 + 24i}$

$7+24i x^2 + 2xyi - y^2 =$

$x^2 - y^2 = 7 \quad (1)$

$2xy = 24 \quad (2)$

$y = \frac{24}{2x} \rightarrow y = \frac{12}{x}$ نعوض في (1)

$x^2 - \left(\frac{12}{x}\right)^2 = 7$

$x^2 + \frac{144}{x^2} = 7 \quad \cdot x^2$

$x^4 - 144 = 7x^2$

$x^4 - 7x^2 - 144 = 0$

$(x^2 - 16)(x^2 + 9) = 0$

$x^2 = 16 \rightarrow x = \mp 4 \rightarrow y = \mp 3$

الجذور $\mp(4 + 3i)$

س: - جد الجذور التربيعية للعدد $-3-4i$

س: - جد الجذور التربيعية للعدد $\frac{4}{1-\sqrt{3}i}$

الحل /

$$\frac{4}{1-\sqrt{3}i}\cdot\frac{1+\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}$$

$$\frac{4(1+\sqrt{3}i)}{1^2+\sqrt{3}^2}\to=\frac{4(1+\sqrt{3}i)}{4}\to=1+\sqrt{3}i$$

$x+yi=\sqrt{1+\sqrt{3}i}$ بالتربيع

$1+\sqrt{3}i\,x^2+2xyi-y^2=$

$x^2-y^2=1 \qquad (1)$

$2xy=\sqrt{3} \qquad (2)$

$y=\frac{\sqrt{3}}{2x}\to y^2=\frac{3}{4x^2}$ نعوض في (1)

$x^2-\frac{3}{4x^2}=1 \qquad \cdot 4x^2$

$4x^4-3=4x^2$

$4x^4-4x^2-3=0$

$(2x^2-3)(2x^2+1)=0$

$2x^2=3\to x^2=\frac{3}{2}\to\to x=\mp\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

اما $x=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\to y=\frac{\sqrt{3}}{2(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}})}$

$$y=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sqrt{2}(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}})}\to y=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\to y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

الجذور $\mp\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

ب)المعادلات التربيعية

1)حل المعادلة

2) ايجاد اوتكوين المعادلة

1) حل المعادلة :- حل تلك المعادلات بأحد طرق التحليل (ان امكن)او بالدستور وقانونه

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

س :- حل المعادله التربيعية

$$2z^2 - 5z + 13 = 0$$

$$a = 2\ , b = -5, c = 13$$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$z = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(2)(13)}}{2(2)}$$

$$z = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 104}}{4}$$

$$z = \frac{5 \pm \sqrt{-79}}{4}$$

$$z = \frac{5 \pm \sqrt{79}i}{4}$$

س :- حل المعادله التربيعية

$$z^2 = -12$$

$$z = \mp\sqrt{-12}$$

$$z = \mp\sqrt{12}i$$

س :- حل المعادله التربيعية

الحل

$$4z^2 + 25 = 0$$
$$4z^2 = -25$$
$$z^2 = \sqrt{\frac{-25}{4}}$$
$$z = \mp\sqrt{\frac{25}{4}}\,i$$
$$z = \mp\frac{5}{2}i$$

===

س :- حل المعادله التربيعية

الحل

نضرب الحد الثالث بi^2
لان الحد الثاني يحتوي i

$$z^2 - 2zi + 3 = 0$$
$$z^2 - 2zi - 3i^2 = 0$$
$$(z - 3i)(z + i) = 0$$

اما $z=3i$

او $z=-i$

===

س :- حل المعادله التربيعية

الحد الثالث لانوزع i على
القوس لان الحد الوسط
لايحوى i

$$z^2 - 2z + i(2 - i) = 0$$
$$(z - i)\big(z - (2 - i)\big) = 0$$

اما $z = i$

او $z = 2 - i$

===

س :- حل المعادله التربيعية

الحل

$$z^2 + 3z + i(3 - i) = 0$$
$$(z + i)\big(z + (3 - i)\big) = 0$$
$$z = -i$$
$$z = -(3 - i)$$

===

2)ايجاد اوتكوين المعادلة التربيعية :- ونستخدم لها قالب المعادلة وهو : -

$$x^2 - \text{مجموع الجذرين}\, x + \text{ضرب الجذرين} = 0$$

خطوات الحل :- نجد مجموع الجذرين وايظا ضرب الجذرين وفي حال اعطى القالب وفيه مجموع الجذرين او ضرب الجذرين فنستخدم المعلوم لأيجاد الجذر الاخر

س :- كون او جد المعادلة التربعية والتي جذريها

$3 - 2i\,, 1 + 4i$

الحل

مجموع الجذرين$= (3 - 2i) + (1 + 4i) = 4 + 2i$

ضرب الجذرين$= (3 - 2i)(1 + 4i) = 3 + 12i - 2i - 8i^2$

$= 11 + 10i$

$x^2 - (4 + 2i)x + (11 + 10i) = 0$

==

س :- كون او جد المعادلة التربعية والتي جذريها

$\frac{3 - i}{1 + i}\,, (3 - 2i)^2$ ؟

الحل

$\frac{3 - i}{1 + i} \cdot \frac{1 - i}{1 - i} = \frac{3 - 3i - i + i^2}{(1^2 + 1^2)} = \frac{2 - 4i}{2} = 1 - 2i$ الجذر الاول

الجذر الثاني $(3 - 2i)^2 = 9 - 12i + 4i^2 = 5 - 12i$

مجموع الجذرين $= (1 - 2i) + (5 - 12i) = 6 - 14i$

ضرب الجذرين $= (1 - 2i)(5 - 12i) = 5 - 12i - 10i + 24i^2$

$= -19 - 22i$

$x^2 - (6 - 14i)x + (-19 - 22i) = 0$

اذا كانت المعادلة ذات معاملات حقيقية فسيكون الجذران مترافقين يعطي احدهما ونحن نستنتج الاخر

س:- ماهي المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية والتي احد جذريها

(2+5i)

الحل

الجذران مترافقان لان المعاملات حقيقه

$2+5i\ ,2-5i$

مجموع الجذرين $=(2+5i)+(2-5i)=4$

ضرب الجذرين $=(2+5i)(2-5i)=((2)^2+(5)^2)=29$

$x^2-(4)x+(29)=0$ ∴ المعادله هي

==

س :- كون المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية والتي احد جذريها

$\frac{\sqrt{2}+3i}{4}$

الحل

$\frac{\sqrt{2}+3i}{4}\ ,\frac{\sqrt{2}-3i}{4}$

مجموع الجذرين $=\left(\frac{\sqrt{2}+3i}{4}\right)+\left(\frac{\sqrt{2}-3i}{4}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

ضرب الجذرين $=\left(\frac{\sqrt{2}+3i}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{2}-3i}{4}\right)=\frac{\left(\left(\sqrt{2}\right)^2+(3)^2\right)}{4\cdot 4}=\frac{2+9}{16}=\frac{11}{16}$

$x^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)x+\left(\frac{11}{16}\right)=0$

==

س :- اذا علمت ان $(3+i)$ هو احد جذري المعادلة

$x^2-(a+bi)x+5+5i=0$

فما هو الجذر الاخر وماقيمة (a,b)

الحل

نفرض الجذرالاخر هو C

ضرب الجذرين $=5+5i$

$C\cdot(3+i)=5+5i$

$C=\frac{5+5i}{3+i}\cdot\frac{3-i}{3-i}$

$C=\frac{15-5i+15i-5i^2}{(3)^2+(1)^2}$

$C = \frac{20 + 10i}{10}$

$C = 2 + i$ الجذر الاخر

مجموع الجذرين $= (3 + i)(2 + i) = 5 + 2i$

$a = 5 \quad b = 2$

==

س :- اذا علمت ان $(3+i)$ هو احد جذري المعادلة

$x^2 - (a + bi)x + 5 + 5i = 0$

فما هو الجذر الاخر وماقيمة (a)

الحل

نفرض الجذرالاخر هو C

ضرب الجذرين $= 5 + 5i$

$C \cdot (3 + i) = 5 + 5i$

$C = \frac{5 + 5i}{3 + i} \cdot \frac{3 - i}{3 - i}$

$C = \frac{15 - 5i + 15i - 5i^2}{(3)^2 + (1)^2}$

$C = \frac{20 + 10i}{10}$

$C = 2 + i$ الجذر الاخر

مجموع الجذرين $= (3 + i)(2 + i) = 5 + 2i$

$a = 5 + 2i$

==

س :- اذا علمت ان $(4-2i)$ هو احد جذري المعادلة

$x^2 - (6 + 3i)x + a = 0$

فما هو الجذر الاخر وماقيمة (a)

الحل

نفرض الجذرالاخر هو C

مجموع الجذرين $= 6 + 3i$

$C + (4 - 2i) = 6 + 3i$

$C = (6 + 3i) - (4 - 2i)$

$C = 2 + 5i$ الجذر الاخر

$a =$ ضرب الجذرين

$a = (4 - 2i)(2 + 5i)$

$a = 8 + 20i - 4i - 10i^2$

$a = 8 + 16i + 10$

$a = 18 + 16i$

لتطبيقي

الجزء الثالث

الجذور التكعيبية للواحد (للتطبيقي فقط):- وهي
$(1,w,w^2)$ وان هذا الموضوع يعتمد اعتمادا كاملا على خواص تلك الاعداد او الجذور

خواص الجذور

لتطبيقي

1) مجموع الكل =0

2) مجموع جذرين = سالب الثالث $w+w^2=-1$

3) سالب جذرين = موجب الثالث $-w-w^2=1$

4) $w^3=1$ $w^{3\text{مضاعفات}}=1$

5) W في المقام(غير مجموع او مطروح بعدد) يصعد w^2 وكذلك w^2 في المقام تصعد w او طريقة اخرى عند وجود w او w^2 في المقام نضع في البسط w^3 ونختصر مع المقام

6) W يترافق مع w^2

7) $w=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$, $w^2=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

تكون اسئلة هذا الموضوع على ثلاث اشكال هي :-

1)اذا وجدنا ثلاث معاملات متشابهة فنسحب معامل مشترك ويكون الناتج صفر

2) اذا وجدنا معاملين متشابهين فنسحب المعامل بينهما مشترك ونحصل على سالب الثالث

3) اذا وجدنا ثلاث معاملات مختلفه فنذهب الى المعامل الكبير ونجزئه لكي نحصل على تشابه بينه و بين المعامل الذى يتبعه

س :- جد ناتج

$$3w^6+3w^2+\frac{3}{w^2}$$

الحل

$$3(1)+3w^2+3w$$
$$3(1+w^2+w)$$
$$3(0)=0$$

س :- جد ناتج

$$3w^{15} - \frac{3}{1+w^2} + \frac{3}{w^5}$$

الحل

$$3(1) - \frac{3}{-w} + \frac{3}{w^2}$$
$$3 + 3w^2 + 3w$$
$$3(1 + w^2 + w)$$
$$3(0) = 0$$

==========

س :- جد ناتج

$$(4 + 6w + 6w^2)^3$$

الحل

$$\left(4 + 6(w + w^2)\right)^3$$
$$\left(4 + 6(-1)\right)^3$$
$$(4 - 6)^3 \quad \rightarrow= (-2)^3 = -8$$

==========

س :- اثبت ان

$$(3w + 5 + 3w^2)^2 = -4(2 + w + 2w^2)^3 = 4$$

الحل

$$(3(w + w^2) + 5)^2 = -4(2(1 + w^2) + w)^3 = 4$$
$$(3(-1) + 5)^2 = -4(2(-w) + w)^3 = 4$$
$$(-3 + 5)^2 = -4(-2w + w)^3 = 4$$
$$(2)^2 = -4(-w)^3 = 4$$
$$(2)^2 = -4 \cdot (-1) = 4$$
$$4 = 4 = 4$$

==========

س :- جد ناتج

$$(2 + 3w + 4w^2)^6$$

الحل

$$(2 + 3w + 3w^2 + w^2)^6$$
$$(2 + 3(w + w^2) + w^2)^6$$
$$(2 + 3(-1) + w^2)^6$$
$$(2 - 3 + w^2)^6$$
$$(-1 + w^2)^6$$

$((-1+w^2)^2)^3$
$(1-2w^2+w^4)^3$
$(1-2w^2+w)^3$
$\left((1+w)-2w^2\right)^3$
$(-w^2-2w^2)^3$
$(-3w^3)^3$
$-27w^6$
-27

==

س :- جد ناتج

$$\left(1-\frac{5}{w^2}+w^2\right)\left(1+w-\frac{2}{w}\right)$$

الحل

$(1-5w+w^2)(1+w-2w^2)$
$(-w-5w)(-w^2-2w^2)$
$(-6w)(-3w^3)$
$18w^3=18$

==

س :- جد ناتج

$$\frac{1}{(1+w^{-32})^{12}}$$

الحل

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{w^{32}}\right)^{12}}$$
$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{w^2}\right)^{12}}$$
$$\frac{1}{(1+w)^{12}}$$
$$\frac{1}{(-w^2)^{12}}$$
$$\frac{1}{w^{24}}$$
$$\frac{1}{1}=1$$

س :- جد ناتج

$$\left(\frac{1}{2+w}-\frac{1}{2+w^2}\right)^2$$

الحل

$$\left(\frac{(2+w^2)-(2+w)}{(2+w)(2+w^2)}\right)^2$$

$$\left(\frac{2+w^2-2-w}{4+2w^2+2w+w^3}\right)^2$$

$$\left(\frac{w^2-w}{4+2(w^2+w)+1}\right)^2$$

$$\left(\frac{w^2-w}{5+2(-1)}\right)^2$$

$$\left(\frac{w^2-w}{3}\right)^2$$

الاس يتوزع على البسط والمقام
فيصبح البسط مربع حدانيه

$$\frac{w^4-2w^3+w^2}{9}$$

$$\frac{w-2(1)+w^2}{9}$$

$$\frac{-1-2}{9}$$

$$=\frac{-3}{9}$$

$$=\frac{-1}{3}$$

==

س :- كون او جد المعادلة التربيعية التي جذريها

$1+w^2$,$1+w$

الحل

مجموع الجذرين $=(1+w^2)+(1+w)$

$$=2+w^2+w$$

$$=2+(-1)=1$$

ضرب الجذرين $=(1+w^2)(1+w)$

$$=1+w+w^2+w^3$$

$$=1+(-1)+1=1$$

$\therefore$ المعادلة هي $x^2-(1)x+(1)=0$

س :- كون او جد المعادلة التربيعية التي جذريها

$\frac{3i}{w^2}, \frac{-3w^2}{i}$

الحل

$3wi, 3w^2i$

مجموع الجذرين $= (3wi) + (3w^2i)$

$= 3i(w + w^2)$

$= -3i$

ضرب الجذرين $= (3wi)(3w^2i)$

$= 9w^3i^2$

$= -9$

تذكر ان i^2 تساوي (-1) و w^3 تساوى (1)

∴ المعادلة هي $x^2 - (-3i)x + (-9) = 0$

س :- كون او جد المعادلة التربيعية التي جذريها

$\frac{1}{2+w}, \frac{1}{2+w^2}$

س : – اذا كانت $z^2 + z + 1 = 0$

فجد قيمة

$$\frac{1 + 3z^{11} + 3z^{10}}{1 - 3z^8 - 3z^7}$$

الحل

$$z^2 + z + 1 = 0$$

$a = 1, b = 1, c = 1$

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.1.1}}{2.1}$$

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2}$$

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

بما ان $w = \frac{-1 \mp \sqrt{3}i}{2} \rightarrow w = z$

$$\frac{1 + 3w^{11} + 3w^{10}}{1 - 3w^8 - 3w^7}$$

$$\frac{1+3w^2+3w}{1-w^2-3w}$$
$$\frac{1+3(w^2+w)}{1-3(w^2+w)}$$
$$\frac{1+3(-1)}{1-3(-1)}$$
$$\frac{1-3}{1+3} \rightarrow \frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$$

==

الجزء الرابع

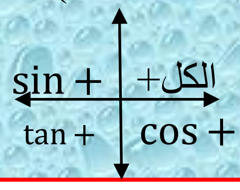
أ) الصيغة القطبية

ب) مبرهنة ديموافر

أ) الصيغة القطبية :- وهي كتابة العدد المركب بشكل $r(\cos\theta + i\sin\theta)$
حيث ان r هو المقياس او الطول ويكون موجب دائما ويرمز له ايظا $\|z\|$
وقانونه : $r=\sqrt{x^2+y^2}$
اما θ يرمز لها arg(z) وهي السعة الاساسية وقيمتها $(0 \le \theta < 2\pi)$
ويمكن ايجادها من خلال $\cos\theta = \frac{x}{r}$, $\sin\theta = \frac{y}{r}$

	θ	θ	r
$1+i$	45	$\frac{\pi}{4}$	$\sqrt{2}$
$\sqrt{3}+i$	30	$\frac{\pi}{6}$	2
$1+\sqrt{3}i$	60	$\frac{\pi}{3}$	2

اذا وجدنا اشارة سالبة في العدد المركب تبقى r كما هي ونبحث عن الربع الذي تقع فيه الزاويه باتباع الاشارة الموجبه ل$(\sin +, \cos + , \tan +)$
حسب المخطط الاتي



لمعرفة الزاوية نتبع مايلي :-

1) في الربع الاول الزاوية $= \theta$

2) في الربع الثاني الزاوية $- \pi = \theta$

3) في الربع الثالث الزاوية $+ \pi = \theta$

4) في الربع الرابع الزاوية $- 2\pi = \theta$

اعلم ان العدد المضروب او المقسوم يؤثر على r فقط

س : - عبر بالصيغة القطبية عن كل مما يأتي

1) $\sqrt{3}+i$

$$(\sqrt{3},1) \to r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(1)^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}= \qquad ,\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{1}{2}=$$

$\theta=\frac{\pi}{6}$ تقع في الربع الاول

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$$z=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

==

2) $1+i$

$$(1,1) \to r=\sqrt{(1)^2+(1)^2}=\sqrt{2}$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad ,\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\theta=\frac{\pi}{4}$ الربع الاول

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$$z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

==

3) $-\sqrt{3}-i$

$$(-\sqrt{3},-1) \to r=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-1)^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-\sqrt{3}}{2} \qquad ,\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{-1}{2}$$

$$\theta=\frac{\pi}{6}$$

$\theta = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$ تقع في الربع الثالث

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

==

4) $-1 + i$

$(-1,1) \to r = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\theta = \frac{\pi}{4}$

$\theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ تقع في الربع الثاني

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

==

5) $-1 + \sqrt{3}i$

$(-1,\sqrt{3}) \to r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-1}{2}$, $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\theta = \frac{\pi}{3}$

$\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ تقع في الربع الثاني

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

==

6) $1 - \sqrt{3}i$

$(1,-\sqrt{3}) \to r = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2}$, $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

$\theta = \frac{\pi}{3}$

$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{6\pi - \pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$ تقع في الربع الرابع

$z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

==========

7) $1 - i$

$(1,-1) \to r = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}} =$

$\theta = \frac{\pi}{4}$

$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{8\pi - \pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$ تقع في الربع الثاني

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

==========

8) $\sqrt{3} - i$

$(\sqrt{3}, -1) \to r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} =$, $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-1}{2} =$

$\theta = \frac{\pi}{6}$

$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{12\pi - \pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$ تقع في الربع الرابع

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$

==========

9) $5 + 5i$

$(5,5) \to r = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\theta = \frac{\pi}{4}$ تقع في الربع الاول

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z = 5\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

==

10) $\frac{\sqrt{3}+i}{4}$

$(\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{1}{4}) \to r = \sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{4})^2 + (\frac{1}{4})^2} = \sqrt{\frac{3}{16}+\frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{4}{16}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad , \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

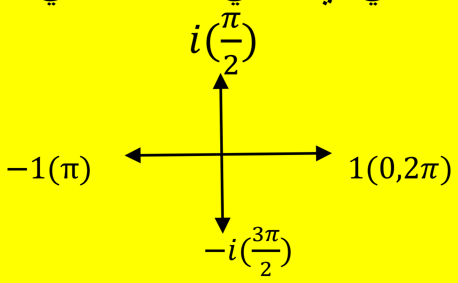
$\theta = \frac{\pi}{6}$ تقع في الربع الاول

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

==

اذا اعطى في السؤال جزء واحد فقي اي حقيقي فقط او تخيلي فقط فنحدد r من العدد المعطى والباقي نحدد منه الزاوية



11) 1

$(1,0) \to r = \sqrt{(1)^2 + (0)^2} = \sqrt{1} = 1$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{1} = 1$ $\quad , \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0$

$\theta = 0$ او 2π

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z = 1(\cos 2\pi + i\sin 2\pi)$

==

12) i

$(0,1) \to r = \sqrt{(0)^2 + (1)^2} = \sqrt{1} = 1$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0$ $\quad , \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{1} = 1$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$
$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$z = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

==

13) $-i$

$$(0,-1) \rightarrow r = \sqrt{(0)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1} = 1$$
$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0 \qquad , \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{1} = 1$$
$$\theta = \frac{3\pi}{2}$$
$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$z = 1\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

==

14) -1

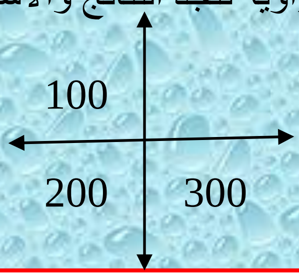
$$(-1,0) \rightarrow r = \sqrt{(-1)^2 + (0)^2} = \sqrt{1} = 1$$
$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-1}{1} = 1 \qquad , \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0$$
$$\theta = \pi$$
$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$z = 1(\cos\pi + i\sin\pi)$$

==

ب) مبرهنة ديموفر : - هي مبرهنة تختص بكيفية توزيع اس القوس القطبي على الزاوية فهي لاتعمل الا مع الصيغة القطبية وبحسب الاس فسيكون هناك طريقتان للمبرهنة هما

1) اذا كان الاس عدد صحيح موجب فنضربه مباشرتا بالزاوية ونختصر ونجد النتائج (ان امكن) اما اذا كان الاس عدد صحيح سالب فان الاشارة تؤثر على اشارة الوسط (التخيلي)فتضرب بالعدد دون اشارته

في نهاية الاجابة اذا وجدنا عدد مضروب في الزاوية فنجد النتائج والاشارات نحددها من العدد المضروب في الزاوية وحسب المخطط



س : - بأستخدام مبرهنة ديموافر احسب

$$(\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6})^2$$

الحل

$$\left(\cos\frac{2\pi}{6}+i\frac{2\pi}{6}\right)$$
$$\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

س : - بأستخدام مبرهنة ديموافر احسب

$$(\cos\frac{\pi}{15}+\text{isin}\frac{\pi}{15})^5$$

الحل

$$\left(\cos\frac{5\pi}{15}+i\sin\frac{5\pi}{15}\right)$$
$$\left(\cos\frac{\pi}{3}i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

س : - بأستخدام مبرهنة ديموافر احسب

$$\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)^4$$

الحل

$$\left(\cos\frac{4\cdot 5\pi}{12}+\text{i}\sin\frac{4\cdot 5\pi}{12}\right)$$
$$\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

الزاوية الاصلية هي $\frac{\pi}{3}$ واما العدد 5 فنحدد منه الربع كما ذكرنا سابقا اي ان 5.60يكون الناتج 300 وحسب المخطط في الربع الرابع ومن المعلوم ان الربع الرابع يكون فيه ال cos موجب وال sin سالب

اما اذا كان ناتج ضرب العدد في الزاوية اكثر من دورة كامله (360) فنقسم البسط على ضعف المقام والباقي نحدد منه الربع من جديد

س : - بأستخدام مبرهنة ديموافر احسب

$(1+i)^{11}$

الحل

$(1,1) \rightarrow r = \sqrt{(1)^2+(1)^2} = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad , \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\theta = \frac{\pi}{4}$ تقع في الربع الاول

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$z^{11} = \left(\sqrt{2}\right)^{11}\left(\cos\frac{11\pi}{4} + i\sin\frac{11\pi}{4}\right)$

$= 32\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

$= 32\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

$= \left(-\frac{32\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{32\sqrt{2}}{\sqrt{2}}i\right)$

$= -32+32i$

==

س : - بأستخدام مبرهنة ديموافر احسب

$(1-i)^7$

الحل

$(1,-1) \rightarrow r = \sqrt{(1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad , \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$\theta = \frac{\pi}{4} \rightarrow 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$ تقع في الربع الرابع

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

$z^7 = \left(\sqrt{2}\right)^7\left(\cos\frac{7\cdot 7\pi}{4} + i\sin\frac{7\cdot 7\pi}{4}\right)$

$= 8\sqrt{2}(\cos\frac{49\pi}{4} + i\sin\frac{49\pi}{4})$

$$= 8\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= 8\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$
$$= 8 + 8i$$

==

س : - بأستخدام مبرهنة ديموافر احسب

$$\left(\cos\frac{5\pi}{24} + i\sin\frac{5\pi}{24}\right)^4$$

الحل

نلاحظ البسط والمقام يقبل القسمة على 3 فبعد الاختصار العدد الباقي نحدد منه الربع

$$\left(\cos\frac{20\pi}{24} + i\sin\frac{20\pi}{24}\right)$$
$$\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$
$$= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

==

س : - بأستخدام مبرهنة ديموافر احسب

$$\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)^{-3}$$

الحل

$$\left(\cos\frac{21\pi}{12} - \sin\frac{21\pi}{12}\right)$$
$$\left(\cos\frac{7\pi}{4} - i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

==

س : - بأستخدام مبرهنة ديموافر احسب

$$(\sqrt{3} + i)^{-9}$$

الحل

$$(\sqrt{3}, 1) \rightarrow r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad , \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}$$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$z^{-9} = (2)^{-9}\left(\cos\frac{9\pi}{6} - i\sin\frac{9\pi}{6}\right)$

$=\frac{1}{2^9}\left(\cos\frac{3\pi}{2} - i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

$= \frac{1}{512}(0-(-1)i)$

$= \frac{1}{521}i$

===

اذا طلب في السؤال ايجاد المقياس فيقصد ايجاد r والسعه يقصد ايجاد الزاوية

2) الجذور : - نتيجة مبرهنة ديموافر وقالبها

$$(\ \ )^{\frac{1}{n}} = \left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

الجذور $k = 0,1,2$

خطوات الحل

أ) نجد الصيغة القطبية

ب) نكتب القالب ونعوض عن $k = 0$ وحسب الجذور المطلوبه ونختصر ان امكن ونجد النتائج

س :- بأستخدام نتيجة مبرهنة ديموافر احسب الجذور التكعيبية للعدد $27i$؟

الحل

$(0,27) \rightarrow r = \sqrt{(0)^2 + (27)^2} = 27$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{0}{27} = 0 \qquad , \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{27}{27} = 1$

$\theta = \frac{\pi}{2}$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z = 27\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

$(z)^{\frac{1}{3}} = (27)^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

$= \left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)$

$= when\ \ k = 0 \quad 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$=3(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$

$when\ \ k = 1 \quad 3\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

$= 3(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$

$when\ \ k = 2 \quad 3(\cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6})$

$$= 3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$
$$= 3(-i) = -3i$$

انتبه $\frac{3\pi}{2}$ هي 270 اي العدد 3 لانحدد منه الربع لانها زاوية اصلية

==

س :- بأستخدام نتيجة مبرهنة ديموافر احسب الجذور الاربعة للعدد

-16

الحل

$(-16,0) \rightarrow r = \sqrt{(-16)^2 + (0)^2} = 16$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-16}{16} = -1 \qquad ,\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{0}{16} = 0$

$\theta = \pi$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z = (\cos\pi + i\sin\pi)$

$(z)^{\frac{1}{4}} = (16)^{\frac{1}{4}}(\cos\pi + \sin\pi)^{\frac{1}{4}}$

$= 2\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right)$

$=when\ \ k = 0 \quad 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

$=\frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{\sqrt{2}}i$

$=\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

$when\ \ k = 1 \qquad 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

$= 2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

$= -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

$when\ \ k = 1 \qquad 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

$=2(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i)$

$=-\sqrt{2} - \sqrt{2}i$

$when\ \ k = 1 \qquad 2\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

$= 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right)$

$=\sqrt{2} - \sqrt{2}i$

==

س : - احسب $(-64i)^{\frac{1}{6}}$ بأستخدام نتيجة مبرهنة ديموافر

الحل

$r = 64$

$z = 64\left(\cos\frac{3\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

$(z)^{\frac{1}{6}} = (64)^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + \sin\frac{3\pi}{2}\right)^{\frac{1}{6}}$

$= 2\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{6} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{6}\right)$

$= when\ \ k = 0 \quad 2\left(\cos\frac{3\pi}{12} + i\sin\frac{3\pi}{12}\right)$

$=2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

$=\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

$when\ \ k = 1 \quad 2\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$

$when\ \ k = 2 \quad 2\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$

$when\ \ k = 3 \quad 2\left(\cos\frac{15\pi}{12} + i\sin\frac{15\pi}{12}\right)$

$when\ \ k = 4 \quad 2\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right)$

$when\ \ k = 5 \quad 2\left(\cos\frac{23\pi}{12} + i\sin\frac{23\pi}{12}\right)$

س :- بأستخدام مبرهنة ديموافر احسب الجذور التكعيبية للعدد

8i

الحل

$r = 8$

$z = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

$(z)^{\frac{1}{3}} = (8)^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

$= 2\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right)$

$= when\ \ k = 0 \qquad 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$= 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$

$= \sqrt{3} + i$

$when\ \ k = 1 \qquad 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

$= 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

$= -\sqrt{3} + i$

$when\ \ k = \qquad 2\left(\cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6}\right)$

$= 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

$= 2(0 - i)$

$= -2i$

س :—بأستخدام مبرهنة ديموافر جد الجذور الخمسة للعدد $(\sqrt{3} + i)^2$

$(\sqrt{3}, 1) \to r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{4} = 2$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad , \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{2}$

$\theta = \frac{\pi}{6}$ تقع في الربع الاول

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z = \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$$z = (2)^2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^2$$

$$z = 4\left(\cos\frac{2\pi}{6} + i\sin\frac{2\pi}{6}\right)$$

$$z = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$(z)^{\frac{1}{5}} = (4)^{\frac{1}{5}}\left(\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$= (4)^{\frac{1}{5}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{5} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{5}\right)$$

$$= when\ \ k = 0 \qquad \sqrt[5]{4}\ \left(\cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15}\right)$$

$$when\ \ k = 1 \qquad \sqrt[5]{4}\ \left(\cos\frac{7\pi}{15} + i\sin\frac{7\pi}{15}\right)$$

$$when\ \ k = 2 \qquad \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{13\pi}{15} + i\sin\frac{13\pi}{15}\right)$$

$$when\ \ k = 3 \qquad \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{19\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15}\right)$$

$$when\ \ k = 4 \qquad \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{25\pi}{15} + i\sin\frac{25\pi}{15}\right)$$

$$= \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$= \sqrt[5]{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

==

س :– لتكن $z = \frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}$ فجد $z^{\frac{1}{2}}$

الحل

$$z = \frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}\cdot\frac{1-\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$$

$$z = \frac{1-\sqrt{3}i-\sqrt{3}i+3i^2}{4}$$

$$z = \frac{-2-2\sqrt{3}i}{4}$$

$z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}$

$(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}) \to r = \sqrt{(-\frac{1}{2})^2 + (-\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2}$ $\quad , \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\theta = \frac{\pi}{3}$

$\theta = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z = 1\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

$$(z)^{\frac{1}{2}} = (1)^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + \text{isin}\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 1\left(\cos\frac{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi}{2}\right)$$

$=when\ \ k = 0 \qquad 1\left(\cos\frac{4\pi}{6} + i\sin\frac{4\pi}{6}\right)$

$=(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$

$= (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)$

$when\ \ k = 1 \qquad 1\left(\cos\frac{10\pi}{6} + i\sin\frac{10\pi}{6}\right)$

س:- بسط مايأتي

من تعريف مبرهنة ديموافر التي تختص بتوزيع اس القوس القطبي فأننا نستنتج ان العدد 2 والعدد3 كانت اس فيمكننا ان نرجعها ك اس لتوحيد الزوايا ونختصر البسط والمقام

$$1)\frac{(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)^5}{(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)^3}$$

$$\frac{((\cos\theta+i\sin\theta)^2)^5}{((\cos\theta+i\sin\theta)^3)^3}$$

$$\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^{10}}{(\cos\theta+\sin\theta)^9}$$

$$(\cos\theta+i\sin\theta)$$

من مبرهنة ديموافر نستنتج ان اشارة الوسط ناتجه من ضرب الاس السالب في القوس القطبي وكما نعلم انه يؤثر على اشارة الوسط فقط

$$2)(\cos\theta+i\sin\theta)^8(\cos\theta-i\sin\theta)^4$$

$$=(\cos\theta+i\sin\theta)^8(\cos\theta+i\sin\theta)^{-4}$$

$$=(\cos\theta+i\sin\theta)^4$$



او تابعونا علئ فيسبوك بعنوان ←— :مسيرتي في السادس

(((بسم الله الرحمن الرحيم)))

الفصل الثاني من الملزمة الرياضيات

إعداد الاستاذ:حسين الحمداني

الرفع الشبكي : قناة وصفحة مسيرتي في السادس

تابعونا على التليكرام عبر المعرف

@T_S_M

وعلى الفيس بوك بعنوان مسيرتي في السادس

* مسيرتي في السادس طريقك الى النجاح *

القطوع المخروطية

القطع المكافئ : هو مجموعة من النقاط في المستوي التي يقع كلا منها على بعد متساوي ونقطة معلومة ((البؤرة)) ومستقيم معلوم ((الدليل)) .

يوجد للقطع المكافئ حالتين

اولاً : اذا وقعت بؤرة القطع المكافئ على محور السينات الموجب فان :

a) المعادلة القياسية للقطع المكافئ لمحور السينات الموجب هي : $y^2 = 4px$

b) البؤرة للقطع المكافئ لمحور السينات الموجب هي : $F\ (p, 0)$

c) معادلة الدليل للقطع المكافئ لمحور السينات الموجب هي: $x = -p$ وتكون سالبة عكس بؤرة القطع دائماً .

ثانياً : اذا وقعت بؤرة القطع المكافئ على محور الصادي الموجب فان :

a) المعادلة القياسية للقطع المكافئ لمحور الصادات الموجب هي : $x^2 = 4py$

b) البؤرة للقطع المكافئ لمحور الصادات الموجب هي : $F\ (0, p)$

c) معادلة الدليل للقطع المكافئ لمحور الصادات الموجب هي: $x = -p$ وتكون سالبة عكس بؤرة القطع دائماً .

س/ جد البؤرة و معادلة القطع المكافئ $y^2 = -8x$ ؟

Solution :

$y^2 = -8x$

$y^2 = 4px$

$4p = -8$

$p = -2$ البؤرة

$x = -p$ معادلة الدليل

$x = 2$

س/ جد معادلة القطع المكافئ اذا علم :

a) بؤرته $(3, 0)$ والرأس في نقطة الاصل .

b) معادلة الدليل $2x - 6 = 0$ والرأس نقطة الاصل ؟

Solution :

a))

F (3,0)

$p = 3$

نعوض عن قيمة p في المعادلة القياسية :

$y^2 = 4px$ المعادلة القياسية :

$y^2 = (4)(3)x$

$y^2 = 12x$

b))

$2x - 6 = 0$

$2x = 6 \quad \rightarrow x = 3$

$p = -3$

$y^2 = 4px$: ☺ المعادلة القياسية للقطع المكافئ والتي تكون عكس اشارة معادلة الدليل و هي

$y^2 = (4)(-3)x$

$y^2 = -12x$

س/ جد معادلة القطع المكافئ اذا علم بؤرته $(5, 0)$ والرأس نقطة الاصل ؟ ثم جد معادلة الدليل للقطع ؟

Solution :

$F\ (5,0)$

$p = 5$

نعوض عن قيمة p في المعادلة القياسية :

$y^2 = 4px$ المعادلة القياسية :

$y^2 = (4)(5)x$

$y^2 = 20x$

$x = -5$ معادلة الدليل وتكون دائما عكس اشارة البؤرة ✍

س/ جد معادلة القطع المكافئ اذا علم بؤرته $(0, -\sqrt{3})$ والرأس نقطة الاصل ؟

Solution :

$F(0, -\sqrt{3})$

$p = -\sqrt{3}$ البؤرة للقطع المكافئ هي :

نعوض عن قيمة p في المعادلة القياسية :

$x^2 = 4py$ المعادلة القياسية :

$x^2 = (4)(-\sqrt{3})\,y$

$x^2 = \; y{-}4\sqrt{3}$

==

س :- جد معادلة القطع المكافئ اذا علم دليل القطع $x = -4$ والرأس نقطة الاصل ؟

Solution :

(دليل القطع المكافئ يمثل بؤرة القطع ولكن بعكس الاشارة اي ان من خلال دليل القطع نحصل على البؤرة)

$x = -4$

F (4 , 0) (يقع القطع على محور السينات من خلال دليل القطع بدلالة x)

$p = 4$

نعوض عن قيمة p في المعادلة القياسية :

$y^2 = 4Px$ المعادلة القياسية :

$y^2 = (4)(4)\,x$

$y^2 = 16x$

==

س :- جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $(0\,,\,-4)$ و الرأس في نقطة الاصل .

Solution :

F (0 , −4)

$p = -4$

نعوض عن قيمة p في المعادلة القياسية :

$x^2 = 4py$ المعادلة القياسية :

$x^2 = (4)(-4)\,y$

$x^2 = -16y$

==

س :- جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $(0\,,\,\sqrt{2})$ والرأس نقطة الاصل .

Solution :

F (0 , $\sqrt{2}$)

$p = \sqrt{2}$

نعوض عن قيمة P في المعادلة القياسية :

$x^2 = 4py$ المعادلة القياسية :

$x^2 = (4)(\sqrt{2})\,y$

$x^2 = 4\sqrt{2}\,y$

س :- جد معادلة القطع المكافئ الذي معادلة دليله $4y-3=0$ والرأس نقطة الاصل .

Solution :

$4y-3=0$

$4y=3$

$y=\frac{3}{4}\rightarrow p=-\frac{3}{4}$

☺ المعادلة القياسية للقطع المكافئ والتي تكون عكس اشارة معادلة الدليل و هي : $x^2=4py$

$x^2=4\left(-\frac{3}{4}\right)y$

$x^2=3y$

س :- في كل مما يأتي جد البؤرة و معادلتي المحور و دليل القطع المكافئ :

a) $x^2=4y$

Solution :

$x^2=4y$

بالمقارنة مع المعادلة القياسية نحصل على : $x^2=4py$

$4p=4$

$p=1$

البؤرة هي : $F(0,1)$

معادلة المحور هي : $x=0$ ومعادلة دليل القطع هي $y=-1$

b) $2x+16y^2=0$

Solution :

$2x+16y^2=0$

$16y^2=-2x$

$8y^2=-x$

$y^2=-\frac{1}{8}x$

بالمقارنة مع المعادلة القياسية نحصل على : $y^2=4px$

$4p=-\frac{1}{8}\rightarrow p=-\frac{1}{32}$

البؤرة هي : $F\left(-\frac{1}{32},0\right)$

معادلة المحور هي : $y=0$ و معادلة دليل القطع هي : $x=\frac{1}{32}$

س/ جد معادلة القطع المكافئ الذي دليله يمر بالنقطة (4 , 3 -) ومركزة نقطة الاصل ؟

Solution :

الاحتمال الاول :

اذا كان القطع على محور السينات فان معادلة الدليل هي : $x = -3$

$p = 3$

المعادلة القياسية للقطع المكافئ هي : $y^2 = 4px$

نعوض عن قيمة p في المعادلة القياسية : $y^2 = 4(3)x$

$y^2 = 12x$

الاحتمال الثاني :

اذا كان القطع على محور الصادات فان معادلة الدليل هي : $y = 4$

$p = -4$

المعادلة القياسية للقطع المكافئ هي : $x^2 = 4py$

✍ نعوض عن قيمة y في المعادلة القياسية : $x^2 = 4(-4)y$

$x^2 = -16y$

س :- جد معادلة القطع المكافئ الذي دليله يمر بالنقطة (-5 , 3) ومركزة نقطة الاصل ؟

Solution :

الاحتمال الاول :

اذا كان القطع على محور السينات فان معادلة الدليل هي :

$x = 3$

$p = -3$

المعادلة القياسية للقطع المكافئ هي : $y^2 = 4px$

نعوض عن قيمة p في المعادلة القياسية : $y^2 = 4(-3)x$

$y^2 = -12x$

الاحتمال الثاني :

اذا كان القطع على محور الصادات فان معادلة الدليل هي : $y = -5$

$p = 5$

المعادلة القياسية للقطع المكافئ هي : $x^2 = 4py$

نعوض عن قيمة p في المعادلة القياسية : $x^2 = 4(5)y$

$x^2 = 20y$

س:- جد معادلة القطع المكافئ الذي دليله يمر بالنقطة (3 , -2) ومركزة نقطة الاصل ؟

Solution :

الاحتمال الاول :

☺ اذا كان القطع على محور السينات فان معادلة الدليل هي : $x = -2$

$p = 2$

المعادلة القياسية للقطع المكافئ هي : $y^2 = 4px$

✍ نعوض عن قيمة p في المعادلة القياسية : $y^2 = 4(2)x$

$y^2 = 8x$

الاحتمال الثاني :

اذا كان القطع على محور الصادات فان معادلة الدليل هي : $y = 3$

$p = -3$

المعادلة القياسية للقطع المكافئ هي : $x^2 = 4py$

❀ نعوض عن قيمة p في المعادلة القياسية : $x^2 = 4(-3)y$

$x^2 = 12y$ —

==

1) اذا كان القطع المكافئ يمر بنقطتين متناظرتين حول محور السينات اي ان الاحداثي السيني يكون ثابت $(x,$ متغير$)$, $(x,$ متغير$)$

فان القطع يقع على محور السينات واحدى النقطتين تحقق المعادلة القياسية للقطع المكافئ .

2) اذا كان القطع المكافئ يمر بنقطتين متناظرتين حول محور الصادات اي ان الاحداثي الصادي يكون ثابت (متغير , y) , (متغير , y)

فان القطع يقع على محور الصادي واحدى النقطتين تحقق المعادلة القياسية للقطع المكافئ .

س :- جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين (2 , 4) , (2 , - 4) ورأسه نقطة الاصل

Solution :

النقطتين متناظرتين حول محور السينات

اذاً المعادلة القياسية للقطع المكافئ هي :

$y^2 = 4px$

☺ نعوض عن احدى النقطتين اللتان تحققان المعادلة القياسية ولتكن النقطة هي(2 , - 4)

$(-4)^2 = 4(2)p$

$16 = 8p$

نعوض عن قيمة p في المعادلة القياسية للقطع المكافئ : $p = 2$

$y^2 = 4(2)x$

$y^2 = 8x$

==

س :-جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين (- 2 , - 5) , (2 , - 5) ورأسه نقطة الاصل ؟

Solution :

✍ المعادلة القياسية للقطع المكافئ هي :

$x^2 = -4py$

☺ نعوض عن احدى النقطتين اللتان يحققان المعادلة القياسية ولتكن النقطة هي : $(2, -5)$

$(2)^2 = -4(-5)p$

$4 = 20p$

$p = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

نعوض عن قيمة p في المعادلة القياسية للقطع :

$$x^2 = 4\,\frac{1}{5}y$$

س: - قطع مكافئ معادلته $Ax^2 + 8y = 0$ يمر بالنقطة $(1\ ,\ 2)$ جد قيمة A ؟ ثم جد بؤرته ودليله ؟ ثم ارسم القطع ؟

Solution :

بما ان القطع يمر بالنقطة (1 , 2) فهي تحقق المعادلة :

$$Ax^2 + 8y = 0$$

$$A(1)^2 + 8(2) = 0$$

$$A + 16 = 0$$

$$A = -16$$

نعوض عن قيمة A في المعادلة القياسية للقطع :

$$-16x^2 + 8y = 0$$

$$-16x^2 = -8y$$

$$2x^2 = y$$

$$x^2 = \frac{1}{2}y$$

بالمقارنة مع المعادلة القياسية نحصل على $x^2 = 4py$

$$4p = \frac{1}{2}$$

$$p = \frac{1}{8}$$

البؤرة : $F\left(0\ ,\ \frac{1}{8}\right)$

معادلة الدليل للقطع المكافئ هي : $y = -\frac{1}{8}$


التفوق يتطلب الاجتهاد,دراسة,الصبر
مسيرتي في السادس

انسحاب المحاور للقطع المكافئ

المعادلة القياسية للقطع المكافئ الذي محوره يوازي احد المحورين ورأسه النقطة (h,k) أي انسحان الرأس من نقطة الأصل (o,o) الى النقطه (h,k)

الرأس	معادلة القطع	البؤره	معادلة الدليل	معادلة المحور	اتجاه الفتحة
(h , k)	$(y-k)^2 = 4p(x-h)$	F(p+h,k)	x=−p+h	y = k	x axis (+)
(h , k)	$(x-k)^2 = 4p(y-k)$	F(h,p+k)	y=−p+k	x = h	y axis (+)

س: - جد الرأس والبؤرة ومعادلة المحور ومعادلة الدليل للقطع المكافئ $(y+1)^2 = 4(x-2)$

Solution :

$(y-k)^2 = 4(x-h)$ الصورة القياسية

h=2 , k=−1 → v= (h,k) = (2,−1) الرأس

4p = 4 → p=1

F(p+h,k) = (3,−1) البؤره

x = −p+h = −1+2=1 معادلة الدليل

y=k → y=−1 معادلة المحور

==

س: - من معادلة القطع الثاني $y^2 + 4y + 2x = -6$ عين الرأس والبؤره ومعادلة المحور ومعادلة الدليل

Solution :

$y^2 + 4y + 4 = -2x - 6 + 4 = -2x - 2$

$(y+2)^2 = -2(x+1)$, $(y-k)^2 = -4p(x-h)^2$

4p=2 → p=2/4 → p=$\frac{1}{2}$, h=−1 , k=−2 → (h, k)= (−1,−2)

F (−p+h,k) = ($\frac{-1}{2}$ −1,−2) = ($\frac{-3}{2}$, −2) البؤرة

x= p+h = $\frac{1}{2}$−1 =$\frac{-1}{2}$ معادلة الدليل

y=k → y=−2 معادلة المحور

==

س:- من معادلة المقطع المكافئ $x^2 + 6x - y = 0$ عين الرأس والبؤره ومعادلة الدليل ومعادلة المحور

Solution :

$x^2 + 6x = y$

$x^2 + 6x + 9 = y + 9 \rightarrow (x+3)^2$ $(x-h)^2 = 4p\,(y-k)$

4p=1 → p+$\frac{1}{4}$, h=−3 , k=−9

(h , k)= (−3 , −9)

F (h, p+k) = (−3 , $\frac{1}{4}$−9) = (−3 , $\frac{-35}{9}$)

y = −p+k = $-\ \frac{1}{4} - 9 = \frac{-37}{4}$ معادلة الدليل → x = h = −3 معادلة المحور

س: من معادله القطع المكاف$(x-1)^2 = 8(y-1)$عين الراس والبؤرة،معادلة الدليل, معادله المحور.

Solution :

$(x-1)^2 = 8(y-1)$

4p=8→p=2 ¸ h=1 ¸ k=1

(h ¸ k) = (1¸1) الراس

F (h ¸ p +k) = (1¸3)

y= -p + k = -2=1= -1 معادلة الدليل

x= h → x= 1 معادله المحور

==

س:- ناقش القطع المكافئ y=$x^2 + 4x$

Solution :

$x^2 + 4x + 4 = y + 4$

$(x+2)^2 = y + 4$

4p=1 → p= $\frac{1}{4}$ ¸ $h = -2$ ¸ $k = -4$

(h¸ k) = (-2¸-4)

F (h ¸ p + k) = (-2¸$\frac{1}{4} - 4) = (-2, \frac{-15}{4})$ البؤرة

y=-p + k= - $\frac{1}{4} - 4 = \frac{-17}{4} = -4\ \frac{1}{4}$ معادلة الدليل

x=h→h=-2 معادله المحور

خطوات تحويل معادلة القطع المكافئ الى الصورة القياسية

1. جعل المتغير التربيعي مع قرينه بالطرف الايسر وباقي الحدود في الطرف الايمن.
2. يجب ان يكون معامل المتغير التربيعي =1 بالقسمة ان كان المعامل ≠ 1 .
3. نجعل الطرف الايسر مربع كامل.
4. جمع الحدود المتشابهة بالطرف الأيمن ثم سحب عامل مشترك ان امكن .
5. نكتب الصورة القياسية المشابهة .

==

س: جد البؤرة والراس ومعادله الدليل والمحور للقطع المكافئ

Solution :

a) $2y^2 - 4y - 3x - 4 = 0$

$(2y^2 - 4y = 3x + 4) \quad \div (2)$

$y^2 - 2y + 1 = \frac{3}{2}x + 2 + 1$ اضافة مربع نصف معامل x

$y^2 - 2y + 1 = \frac{3}{2}x + 3$

$(y-1)^2 = \frac{3}{2}(x+2)$

k =1 , h=1 , 4p =$\frac{3}{2} \rightarrow p = \frac{3}{8}$

(h , k) = (−2 , 1)   الرأس

F(p+h , k) = ($\frac{3}{8} - 2$, 1) = ($\frac{-13}{8}$, 1)   البؤره

x = −p+h = $\frac{-3}{8} - 2 = \frac{-19}{8}$ معادلة الدليل

y = k → y = 1   معادلة المحور

b) $(3x^2 - 12y + 9 = 0) \;\; \div (3)$

$x^2 - 4y + 3 = 0 \;\; \rightarrow \;\; x^2 = 4y - 3 \rightarrow (x-0)^2 = (y - \frac{3}{4})$

4p= 4 → p= 1 , h=0 , k= $\frac{3}{2}$

F (h, p+k) = (0, 1+$\frac{3}{4}$) = $(0, \frac{7}{4})$

y= −p+k = −1+$\frac{3}{4} = -1/4$ معادلة الدليل

x= h → x=0 معادلة المحور

س:- جد البؤره والرأس ومعادلة المحور والدليل للقطع المكافئ $y=\frac{x^2}{8} + \frac{x}{4} - \frac{15}{8}$

س:- من معادلة القطع المكافئ $y^2 = -16\,(x+4)$ عين الرأس والبؤره ومعادلة المحور الدليل

Solution :

$(y-0)^2 = -16(x+4)$

4p = −16 → p = −4 , h = −4 , k = 0

(h , k) = (−4 , 0)   الرأس

F (−p+h , k) = (−4−4 , 0) = (−8 , 0)   البؤره

x= p+h = 4−4=0 → x=0   معادلة الدليل

y = k → y = 0   معادلة المحور

التعريف

باستخدام التعريف نجد معادلة القطع المكافئ

عندما نستخدم قانون التعريف يجب ان يتوفر لدينا بؤرة و معادلة الدليل للقطع المكافئ .

1) اذا كان القطع يقع على محور السينات فان قانون التعريف للقطع المكافئ يكون بالشكل التالي :

$$MF = MQ$$

$$\sqrt{(x-P)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+P)^2 + (y-y)^2}$$

2) اذا كان القطع يقع على محور الصادات فان قانون التعريف للقطع المكافئ يكون بالشكل التالي :

$$MF = MQ$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y+p)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y-p)^2}$$

يمكن تحديد موقع القطع حسب البؤرة او معادلة دليل القطع المكافئ فيما اذا كانت لمحور السينات او الصادات .

س:- باستخدام التعريف جد معادلة القطع المكافئ اذا علم ان بؤرته $(\sqrt{3}, 0)$ والرأس في نقطة الاصل ؟

Solution :

$F = (\sqrt{3}, 0)$ من خلال بؤرة القطع يقع على محور السينات

$p = \sqrt{3}$

$$MF = MQ$$

$$\sqrt{(x-P)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+P)^2 + (y-y)^2}$$

$$\sqrt{(x-\sqrt{3})^2 + (y)^2} = \sqrt{(x+\sqrt{3})^2 + 0}$$

$$\sqrt{x^2 - 2\sqrt{3}\,x + 3 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2\sqrt{3}\,x + 3}$$ بتربيع الطرفين

$$x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 + y^3 = x^2 + 2\sqrt{3}x + 3$$

معادلة القطع المكافئ هي : $y^2 = 2\sqrt{3}x$

س/ باستخدام التعريف جد معادلة القطع المكافئ اذا كانت :

a) البؤرة $(7, 0)$ والرأس نقطة الاصل b) معادلة دليل القطع $y = \sqrt{3}$ والرأس نقطة الاصل .

Solution :

$F(7, 0)$ من خلال البؤرة القطع يقع على محور السينات

$p = 7 \qquad MF = MQ$

$$\sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+p)^2 + (y-y)^2}$$

$$\sqrt{(x-7)^2 + (y)^2} = \sqrt{(x+7)^2 + 0}$$

بتربيع الطرفين $\sqrt{x^2 - 14x + 49 + y^2} = \sqrt{x^2 + 14x + 49}$

$$x^2 - 14x + 49 + y^2 = x^2 + 14x + 49$$

❁ معادلة القطع المكافئ هي : $y^2 = 28x$

---

b) معادلة دليل القطع $y = \sqrt{3}$ والرأس نقطة الاصل .

Solution :

من خلال معادلة دليل القطع يقع على محور الصادات $y = \sqrt{3}$

بؤرة القطع هي $F\ (0, \sqrt{3})$

$$MF = MQ$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y+\text{p})^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y-\text{p})^2}$$

$$\sqrt{x^2 + (y+\sqrt{3})^2} = \sqrt{0 + (y-\sqrt{3})^2}$$

بتربيع الطرفين $\sqrt{x^2 + (y+\sqrt{3})^2} = \sqrt{(y-\sqrt{3})^2}$

$$x^2 + (y+\sqrt{3})^2 = (y-\sqrt{3})^2$$

$$x^2 + y^2 + 2\sqrt{3}y + 3 = y^2 - 2\sqrt{3}y + 3$$

معادلة القطع المكافئ هي : $x^2 + 2\sqrt{3}y = -2\sqrt{3}y$

$$x^2 = -2\sqrt{3}y - 2\sqrt{3}y$$

$$x^2 = -4\sqrt{3}y$$

تـمــاريـــن + اسئلة وزاريــة

س1/ جد البؤرة و معادلة دليل القطع المكافئ $3x^2 - 60y = 0$ ؟

س2/ جد معادلة القطع المكافئ الذي دليله يمر بالنقطة (3 - , 4) ومركزة نقطة الاصل ؟

س3/ جد معادلة القطع المكافئ الذي دليله يمر بالنقطة (3 , 4 -) ومركزة نقطة الاصل ؟

س4/ جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين $(1 , 2\sqrt{5})$, $(1 , -2\sqrt{5})$ ورأسه نقطة الاصل ؟

س5/ جد معادلة القطع المكافئ الذي معادلة دليلهُ هي $y = 18$ ؟

س6/ باستخدام التعريف جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرتهُ (0 , 7) والرأس نقطة الاصل ؟

س7/ قطع مكافئ معادلته $a x^2 + 8y = 0$ يمر بالنقطة (1 , 2) جد قيمة a ؟ ثم جد بؤرته و دليله ؟

س8/ قطع مكافئ معادلته $\frac{1}{4} y^2 - ax = 0$ يمر بالنقطة (3 , 6 -) جد قيمة a ؟ ثم جد بؤرته و دليله ؟

س9/ جد معادلة القطع المكافئ الذي دليله يمر بالنقطة (4 - , 2) ومركزة نقطة الاصل ؟

س10/ قطع مكافئ معادلته $x^2 - 2ay = 0$ يمر بالنقطة (1 , 0) جد قيمة a ؟ ثم جد بؤرته و دليله ؟

س11/ قطع مكافئ معادلته $y^2 - 4ax = 0$ يمر بالنقطة (0 , 2 -) جد قيمة a ؟ ثم جد بؤرته و دليله ؟

س12/ اذا كانت النقطة (4 , 2) تنتمي الى قطع مكافئ $y^2 = (a + 4) x$ جد قيمة a ؟

س13/ اذا كان $x = 3$ دليل القطع المكافئ $y^2 = (5a - 2) x$ جد قيمة a ؟

س14/ اذا كان القطع المكافئ $x^2 = (3 - m) y$ مركزه نقطة الاصل و دليله يمر بالنقطة (8 , 4 -) فجد قيمة m ؟

القطع الناقص :- هو مجموعة من النقط في المستوي التي يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين (البؤرتان)عدد ثابت $2a$

$$PF1 + PF2 = 2a$$

1 اذا وقع القطع الناقص على محور السينات فـــــأن :

a) معادلتهُ القياسية هي :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

b) بؤرتا القطع الناقص لمحور السينات هي : F1(c , 0) , F2(- c , 0)

C) رأسا الكبير للقطع الناقص لمحور السينات هي : v 1(a , 0) , v2(- a , 0)

d) القطبين للقطع الناقص لمحور السينات هي : b1 (0 , b) , b2(0 , - b)

2) اذا وقع القطع الناقص على محور الصادات فـــــأن :

a) معادلتهُ القياسية هي :

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

b) بؤرتا القطع الناقص لمحور الصادات هي : F1(0 , c) , F2(0 , - c)

C) رأسا الكبير للقطع الناقص لمحور الصادات هي : v1(0 , a), v2(0 , - a)

d) القطبين للقطع الناقص لمحور الصادات هي : b1 (- b , 0) , b2 (b , 0)

1) يرمز لطول المحور الكبير بالرمز a و قانونه هو :

طول المحور الكبير = $2a$

2) يرمز لطول المحور الصغير بالرمز b و قانونه هو :

طول المحور الصغير = $2b$

3) يرمز للمسافة بين البؤرتين بالرمز c و قانونها هو :

المسافة بين البؤرتين = 2c

4) يرمز لمساحة القطع الناقص بالرمز A و قانونها هو :

$A = ab\,\pi$

5) يرمز لمحيط القطع الناقص بالرمز P و قانونهُ هو :

$P = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

6) يرمز للأختلاف المركزي للقطع الناقص بالرمز e وقانونه هو :

$e = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$ (or) $e = \frac{c}{a}$

7) يرمز للبؤرة بالرمز c للقطع الناقص والعلاقة بينها وبين ba , هي :

$c^2 = a^2 - b^2$

8) يرمز لمحيط المثلث بالرمز P وقانونه $2a + 2c$

9) يرمز لمساحة المثلث في القطع الناقص بالرمز A ويمكن ايجادها من خلال القانون :

$A = \frac{1}{2}(2)\,bC$

10) يكون الرأس a اكبر من القطب b واكبر من البؤرة c

س :- جد طول كل من المحورين و احداثي كل من البؤرتين و الرأسين و الاختلاف المركزي للقطع الناقص

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

Solution :

بما ان القطع يقع على محور السينات فان :

$a^2 = 25$ بالجذر للطرفين :

$a = 5$

$b^2 = 16$ بالجذر للطرفين :

$b = 4$

$2a =$ طول المحور الكبير

$2a = 2(5) = 10$ unit

$2b =$ طول المحور الصغير

$2b = 2(4) = 8$ unit

$c^2 = a^2 - b^2$

$c^2 = (5)^2 - (4)^2$

$c^2 = 25 - 16$

$c^2 = 9 \qquad c = \mp 3$

$v1(a, 0), v2(-a, 0)$ ➡ الرأسان هما : $v1(5, 0), v2(-5, 0)$

$F1(c, 0), F2(-c, 0)$ ➡ البؤرتان هما : $F1(3, 0), F2(-3, 0)$

$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$ الاختلاف المركزي للقطع الناقص :

س :- جد طول كل من المحورين واحداثي كل من البؤرتين والرأسين والاختلاف المركزي للقطع الناقص :

$4x^2 + 3y^2 = \frac{4}{3}$ ؟

Solution :

$4x^2 + 3y^2 = \frac{4}{3}$ (نضرب في $\frac{3}{4}$)

$3x^2 + \frac{9y^2}{4} = 1$

$$\frac{x^2}{\frac{1}{3}}+\frac{y^2}{\frac{4}{9}}=1$$

بما ان القطع يقع على محور الصادات فان :

$a^2 = \frac{4}{9} \qquad a = \frac{2}{3}$ بجذر الطرفين

$b^2 = \frac{1}{3} \qquad b = \frac{1}{\sqrt{3}}$ بجذر الطرفين :

$2a =$ طول المحور الكبير

$2a = 2\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$ unit

$2b =$ طول المحور الصغير

$2b = 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}$ unit

$c^2 = a^2 - b^2$

$c^2 = \frac{4}{9} - \frac{1}{3}$

$c^2 = \frac{4-3}{9}$

$c = \frac{1}{3}$

$v1(0, a), v2(0, -a)$: الرأسان هما

$v1(0, \frac{2}{3}), v2(0, -\frac{2}{3})$

F1(0,c) , F2 (0,- c)

$F1(0, \frac{1}{3})$, $F2(0, -\frac{1}{3})$: البؤرتان هما

$e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}$: الاختلاف المركزي

$e = \frac{1}{2}$

==========

س:- عين كل من البؤرتين و الرأسين والقطبين و المركز ؟ ثم طول ومعادلة كل من المحورين والاختلاف المركزي للقطع الناقص :

A) $x^2 + 2y^2 = 1$

Solution :

$x^2 + 2y^2 = 1$

$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1$

$a^2 = 1 \rightarrow a = \mp 1$

$b^2 = \frac{1}{2} \rightarrow b = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}$

$c^2 = a^2 - b^2$

$c^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$c = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

$v1(a, 0)$, $v2(-a, 0)$: الرأسان هما

$v1(1, 0)$, $v2(-1, 0)$

$b1(0, b)$, $b2(0, -b)$: القطبان هما

$b1(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $b2(0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$

البؤرتان هما : F1(c , 0) , F2(- c , 0)

F1($\frac{1}{\sqrt{2}}$, 0) , F2(- $\frac{1}{\sqrt{2}}$, 0)

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1}$$

الاختلاف المركزي $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$

طول المحور الكبير $2a = 2(1) = 2$

طول المحور الصغير $2b = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}$

المسافة بين البؤرتين $2c = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}$

$9x^2 + 13y^2 = 117$ (B

Solution :

$9x^2 + 13y^2 = 117$ (بالقسمة على 117)

$$\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$a^2 = 13$

$a = \sqrt{13}$

$b^2 = 9 \qquad b = \pm 3$

$c^2 = a^2 - b^2$

$c^2 = 13 - 9$

$c^2 = 4 \qquad c = \pm 2$

الرأسان هما : $v1(a , 0) , v2(- a , 0)$

$v1(\sqrt{13} , 0) , v2(- \sqrt{13} , 0)$

القطبان هما : b1(0 , b) , b2(0 , - b)

b1(0 , 3) , b2(0 , - 3)

البؤرتان هما : F1(c , 0) , F2(- c , 0)

F1(2 , 0) , F2(- 2 , 0)

$$e = \frac{c}{a}$$

$e = \frac{2}{\sqrt{13}}$ الاختلاف المركزي

$2a = 2(\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$ طول المحور الكبير

$2b = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}$ طول المحور الصغير

$2c = 2(3) = 6$ المسافة بين البؤرتين

==

س جد طول كل من المحورين و احداثي كل من البؤرتين و الرأسين و الاختلاف المركزي للقطع الناقص $400 = 25y^2 + 16x^2$

س / جد طول كل من المحورين و احداثي كل من البؤرتين و الرأسين و الاختلاف المركزي للقطع الناقص $400 = 16y^2 + 25x^2$ ؟

/ جد طول كل من المحورين و احداثي كل من البؤرتين و الرأسين و الاختلاف المركزي للقطع الناقص $30 = 3y^2 + 5x^2$

==

س :- جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $F1(-3, 0)$, $F2(3, 0)$ ورأساه النقطتان $v1(5, 0)$, $v2(-5, 0)$ ومركزه نقطة الاصل ؟

Solution :

من خلال البؤرتان و الرأسان نلاحظ ان موقع القطع على محور السينات و مركزه في نقطة الاصل :

$c = 3 \quad \rightarrow c^2 = 9$

$a = 5 \quad \rightarrow a^2 = 25$

$c^2 = a^2 - b^2$

$9 = 25 - b^2$

$b^2 = 25 - 9 = 16$

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

==

س:- جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين ويقطع من محور السينات جزءاً طولهُ 12 وحدات و من محور الصادات جزءاً طولهُ 8 وحدات ؟ ثم جد المسافة بين البؤرتين ومساحة ومحيط القطع الناقص ؟

Solution :

$2a = 12 \quad \rightarrow a = 6 \quad \rightarrow a^2 = 36$

$2b = 8 \quad \rightarrow b = 4 \quad \rightarrow b^2 = 16$

$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$

$c^2 = a^2 - b^2$

$c^2 = (6)^2 - (4)^2 = 20 \quad \rightarrow c = \pm\sqrt{20}$

المسافــة بين البؤرتين هـــــي : $2c = 2\sqrt{20}$

قانون مساحة القطع الناقص هي : $A = a\,b\pi$

$= (6)(4)\,\pi A$

$= 24\,\pi\ unit A$

قانون محيط القطع الناقص هي : $P = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

$p = 2\pi\sqrt{\frac{36+16}{2}}$

$p = 2\pi\sqrt{\frac{52}{2}}$

$p = 2\pi\sqrt{26}$ unit

س : جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل و احدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $x^2 + 8y = 0$ ورأساه النقطتان $(0, \pm 5)$ ؟ ثم جد مساحتهُ و محيطهُ ؟

Solution :

$x^2 = -8y$

$4p = -8$

$p = -2$

بؤرة القطع المكافئ هي : $F(0, -2)$

بؤرتي القطع الناقص هي : $F1(0, 2), F2(0, -2)$ الذي يكون محورة على محور الصادات

كذلك يوجد لدينا الرأسان هما : $v(0, \pm 5)$

$a = 5 \quad \rightarrow a^2 = 25$

$c^2 = a^2 - b^2$

$4 = 25 - b^2$

$b^2 = 25 - 4$

$b^2 = 21$

$\frac{x^2}{21} + \frac{y^2}{25} = 1$

قانون مساحة القطع الناقص هي : $A = a\,b\pi$

$A = (5)(\sqrt{21})\,\pi$

$A = 5\sqrt{21}\,\pi$ unit

قانون محيط القطع الناقص هي :

$$p = 2\pi \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

$$p = 2\pi \sqrt{\frac{25 + 21}{2}}$$

$$p = 2\pi \sqrt{\frac{46}{2}}$$

$$p = 2\pi \sqrt{23} \text{ unit}$$

===

س:- جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل و بؤرتاه على محور السينات و المسافة بين البؤرتين (6) وحدات .

والفرق بين طولي المحورين يساوي (2) وحدة ؟

Solution :

$2c = 6 \quad \rightarrow c = 3$

$2a - 2b = 2 \quad \div 2$

$a - b = 1$

$a = 1 + b \quad \cdots (1)$

$c^2 = a^2 - b^2$

$(3)^2 = (1 + b)^2 - b^2$

$9 = 1 + 2b + b^2 - b^2$

$9 = 1 + 2b$

$2b = 9 - 1 \quad \rightarrow 2b = 8 \quad \rightarrow b = 4$

$b^2 = 16$

نعوض عن قيمة b في معادلة (1) لكي نجد قيمة a

$a = 1 + 4$

$a = 5 \quad \rightarrow a^2 = 25$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

س :- جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل و احدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ
$y^2 - 12x = 0$ و طول محوره الصغير يساوي (10) ؟

Solution :

$y^2 - 12x = 0$

$y^2 = 12x$

$4p = 12 \quad \rightarrow p = 3$

بؤرة القطع المكافئ هي : F (3 , 0)

بؤرتي القطع الناقص هي : F1 (3 , 0) , F2 (- 3 , 0) الذي يكون محورة على محور السيني

$c = 3 \quad \rightarrow c^2 = 9$

$2b = 10 \quad \rightarrow b = 5 \quad \rightarrow b^2 = 25$

$c^2 = a^2 - b^2$

$9 = a^2 - 25$

$a^2 = 25 + 9$

$a^2 = 34$

$$\frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{25} = 1$$

س :- جد معادلة القطع الناقص الذي مركزة نقطة الاصل في كل مما يأتي :

A) البؤرتان هما النقطتان (+ 5 , 0) , (-5 , 0) وطول محورة الكبير يساوي 12 وحدة .

Solution :

$c = 5 \qquad c^2 = 25$

$2a = 12 \quad \rightarrow \quad a = 6 \quad \rightarrow \quad a^2 = 36$

$c^2 = a^2 - b^2$

$25 = 36 - b^2$

$b^2 = 36 - 25$

$b^2 = 11$

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{11} = 1$$

B) بؤرتاه (0 , ± 2) ويتقاطع مع محور السينات عند $x = \pm 4$.

Solution :

☜ من خلال البؤرتان التي تقع على محور الصادات لذلك فان القطبين تمثل محور السينات لانهما متعاكسان

$c = 2 \quad \rightarrow c^2 = 4$

$b = 4 \quad \rightarrow b^2 = 16$

$c^2 = a^2 - b^2$

$4 = a^2 - 16$
$a^2 = 4 + 16 = 20$
$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{20} = 1$$

c) احدى بؤرتيه تبعد عن نهايتي محوره الكبير بالعددين 1 , 5 وحده على الترتيب :

Solution :
$2a = 1 + 5$
$2a = 6 \quad \rightarrow a = 3 \quad \rightarrow a^2 = 9$

$2c = 5 - 1$
$2c = 4 \quad \rightarrow c = 2 \quad \rightarrow c^2 = 4$
$c^2 = a^2 - b^2$
$4 = 9 - b^2$
$b^2 = 9 - 4$
$b^2 = 5$
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1 \qquad , \qquad \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$$

d) الاخلاف المركزي يساوي $\frac{1}{2}$ و طول محورة الصغير 12 unit ؟

Solution :
$$e = \frac{c}{a}$$
$$\frac{1}{2} = \frac{c}{a} \qquad \rightarrow a = 2c$$

$a^2 = 4c^2 \quad \cdots (1)$
$2b = 12$
$b = 6 \quad \rightarrow b^2$
$c^2 = a^2 - b^2$
$c^2 = 4c^2 - 36$
$36 = 4c^2 - c^2$
$36 = 3c^2 \quad \rightarrow c^2 = 12$ نعوض عن قيمة c^2 في معادلة (1) لكي نجد قيمة a^2
$a^2 = 4(12) = 48$
$$\frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{36} = 1 \quad , \quad \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{48} = 1$$

E) المسافة بين البؤرتين تساوي 8 وحدات و نصف محورة الصغير يساوي 3 وحدات .

Solution :

$$\frac{1}{2}(2b) = 3$$

$$b = 3 \quad \rightarrow b^2 = 9$$

$$2c = 8 \quad \rightarrow c = 4$$

$$c^2 = 16$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$16 = a^2 - 9$$

$$a^2 = 16 + 9 = 25$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad , \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

س: - جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل و احدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ الذي معادلة $y^2 + 8x = 0$ علماً ان القطع الناقص يمر بالنقطة $(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$ ؟

Solution :

$$y^2 = -8x$$

$$4p = -8$$

$$p = -2$$

بؤرتا القطع الناقص هي نفسها بؤرتا القطع المكافئ اي ان : F1 (- 2 , 0) , F2 (2 , 0)

$$c = 2 \quad \rightarrow c^2 = 4$$

نعوض عن النقطة في معادلة القطع الناقص لمحور السينات لان موقع بؤرة القطع المكافئ تقع على محور السينات

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(2\sqrt{3})^2}{a^2} + \frac{(\sqrt{3})^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{12}{a^2} + \frac{3}{b^2} = 1$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \quad \rightarrow 4 = a^2 - b^2$$

$$a^2 = 4 + b^2 \quad \cdots (1)$$

$$\frac{12}{4+b^2}+\frac{3}{b^2}=1$$

$$\frac{12b^2+12+3b^2}{4b^2+b^4}=1$$

$$4b^2+b^4=12b^2+12+3b^2$$

$$b^4+4b^2-12b^2-3b^2-12=0$$

$$b^4-11b^2-12=0$$

$$(b^2-12)(b^2+1)=0$$

$$b^2-12=0 \quad \rightarrow b^2=12$$

نعوض عن قيمة b^2 في معادلة $a^2=4+b^2$ لكي نجد قيمة a^2

$$a^2=4+12$$

$$a^2=16$$

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$$

س: - جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه على محور السينات والقطع يمر بالنقطتين $(6,2),(3,4)$ ؟ د1 2000

Solution :

نعوض عن كلا النقطتين في معادلة القطع الناقص لمحور السينات $(6,2),(3,4)$

$$\frac{(6)^2}{a^2}+\frac{(2)^2}{b^2}=1 \rightarrow \frac{36}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1 \quad \cdots(1)$$

$$\frac{(3)^2}{a^2}+\frac{(4)^2}{b^2}=1 \rightarrow \frac{9}{a^2}+\frac{16}{b^2}=1 \quad (*4) \quad \cdots(2)$$

$$\frac{36}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1 \quad \cdots(1)$$

$$\frac{36}{a^2}+\frac{64}{b^2}=4 \quad \cdots(2)$$

نحل المعادلتين انيآ بالطرح

$$\frac{-60}{b^2} = -3$$

$b^2 = 20$ نعوض في احدى المعادلتين

$$\frac{36}{a^2} + \frac{4}{20} = 1 \quad \cdots (1) \quad \rightarrow \frac{36}{a^2} = 1 - \frac{1}{5} \quad \rightarrow \frac{36}{a^2} = \frac{4}{5} \quad \rightarrow 36a^2 = 180 \rightarrow a^2 = 45$$

$$\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{20} = 1$$

===

س :- جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل و بؤرتاه نقطتا تقاطع المنحني

$x^2 + y^2 - 3x = 16$ مع محور الصادات ويمس دليل القطع المكافئ $y^2 = 12x$ ؟

Solution :

من معادلة لمنحني نجد y عندما $x = 0$ لان المنحني يتقاطع مع محور الصادات $x^2 + y^2 - 3x = 16$

$(0)^2 + y^2 - 3(0) = 16$

$y^2 = 16$

$y = \pm 4$

بؤرتي القطع الناقص هي : $(0, 4)$, $(0, -4)$

$C = 4$

$c^2 = 16$

معادلة القطع المكافئ هي : $y^2 = 12x$

$4p = 12 \rightarrow p = 3$

$b = 3 \rightarrow b^2 = 9$

$c^2 = a^2 - b^2$

$16 = a^2 - 9$

$a^2 = 16 + 9 = 25$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

===

س: - جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتميان الى محور السينات ومركزة نقطة الاصل و طول محوره الكبير ضعف طول محوره الصغير و يقطع القطع المكافئ $y^2 + 8x = 0$ عند النقطة التي احداثيها السيني -2؟

Solution :

$y^2 = -8x$

نعوض عن قيمة $x = -2$ في القطع المكافئ لكي نجد قيمة y

$y^2 = -8(-2)$

$y^2 = 16$

$y = \pm 4$

نقطتي القطع الناقص هي $(-2,4)(-2,-4)$

طول محوره الكبير = ضعف طول محوره الصغير

$2a = 2(2b)$

$a = 2b \quad \rightarrow a^2 = 4b^2$

نعوض عن احدى النقطتين و كذلك عن قيمة a في معادلة القطع لكي نجد قيمة b

$$\frac{4}{4b^2} + \frac{16}{b^2} = 1$$

$$\frac{1}{b^2} + \frac{16}{b^2} = 1 \quad \rightarrow \frac{17}{b^2} = 1 \quad \rightarrow b^2 = 17$$

$b = \mp\sqrt{17}$

$a = 2\sqrt{17}$

$a^2 = 68$

$$\frac{x^2}{68} + \frac{y^2}{17} = 1$$

س : - قطع ناقص معادلة $hx^2 + ky^2 = 36$ ومركزة نقطة الاصل و مجموع مربعي طولي محوريه يساوي 60 واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2 = 4\sqrt{3}\,x$ ماهي قيم كل من h , k الحقيقية ؟

Solution :

$y^2 = 4\sqrt{3}\,x$

$4p = 4\sqrt{3} \quad \rightarrow p = \sqrt{3} = c$ للناقص

$c^2 = 3$

$(2a)^2+(2b)^2 = 60$

$4a^2 + 4b^2 = 60 \qquad \cdots (\div 4)$

$a^2 + b^2 = 15$

$a^2 = 15 - b^2 \qquad \cdots (1)$

☜ نعوض عن معادلة 1 في العلاقة الثابته

$c^2 = a^2 - b^2$

$3 = 15 - b^2 - b^2$

$3 - 15 = -2b^2$

$-12 = -2b^2 \qquad \rightarrow b^2 = 6$

نعوض عن قيمة b^2 في معادلة (1) لكي نجد قيمة a^2

$a^2 = 15 - 6 \rightarrow \qquad a^2 = 9$

$hx^2 + ky^2 = 36 \qquad (\div 36)$

$\frac{x^2}{\frac{36}{h}} + \frac{y^2}{\frac{36}{h}} = 1$

$a^2 = \frac{36}{h} \rightarrow \quad 9 = \frac{36}{h} \rightarrow h = \frac{36}{9} = 4 \, , b^2 = \frac{36}{k} \rightarrow 6 = \frac{36}{k} \rightarrow k = \frac{36}{6} = 6$

س :- جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ

$x^2 = 24y$ ومجموع طولي محورية يساوي 36 وحدة ؟

Solution :

$x^2 = 24y$

$x^2 = 4py$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية :

$4p = 24 \quad \to p = 6$

$(0,6),(0,-6)$ بؤرتي القطع الناقص هي :

$c = 6 \quad \to c^2 = 36$

$2a + 2b = 36 \qquad \div 2$

$a + b = 18$

$a = 18 - b \quad \cdots (1)$

$c^2 = a^2 - b^2$

نعوض عن معادلة (1) في المعادلة العلاقة الثابته

$36 = (18 - b)^2 - b^2$

$36 = 324 - 36b + b^2 - b^2$

$36 = 324 - 36b \qquad (\div 36)$

$1 = 9 - b$

$b = 9 - 1 = 8$ تعوض عن قيمة b في معادلة (1) لكي نجد قيمة a :

$b^2 = 64$

$a = 18 - 10 = 10$

$a = 10 \quad \to a^2 = 100$

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$$

س :- جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتيه F1 (4 , 0) , F2 (- 4 , 0) والنقطة P تنتمي اليه بحيث ان محيط المثلث = 24 وحده ؟

Solution :

من خلال البؤرتين F1 (4 , 0) , F2 (- 4 , 0) القطع الناقص يقع على محور السينات

$c = 4 \quad \rightarrow c^2 = 16$

$p = 2a + 2c$ 2014/د

$24 = 2a + 2(4)$ وزاري1

$2a = 24 - 8$

$2a = 16 \quad \rightarrow a = 8$

$a^2 = 64$

$c^2 = a^2 - b^2$

$16 = 64 - b^2$

$b^2 = 64 - 16$

$b^2 = 48$

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$$

انسحاب المحاور للقطع الناقص

1) . المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي محوره الأكبر يوازي المحور السيني ومركزه (h , k)

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

البؤرتان هما $F_1\ (c+h\,.\,k\ ),\ F_2(\,-c+h\,,k)$
الرأسان هما $V_1\,(a+h\,,k)\ ,\ V_2\,(-a+h\,,k)$
القطبان هما $M_1\ (h,\,b+k)\,,\ M_2\,(h,\,-b+k)$
طول المحور الكبير $=2a$, ومعادلته $y=k$
طول المحور الصغير $=2b$ ومعادلته $x=h$

2) . المعادله القياسيه للقطع الناقص الذي محوره الاكبر يوازي المحور الصادي ومركزه (h , k)

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

البؤرتان هما $F_1(h\,,c+k)\ ,\ F_2(h\,,-c+k\,)$
الرأسان هما $v_1(h\,,a+k)\ ,\ v_2(h\,,-a+k)$
القطبان هما $M_1(b+h\,,0)\ ,\ M_2(-b+h)$
طول المحور الكبير $2a=$ ومعادلته $x=h$
طول المحور الصغير $2b=$ ومعادلته $y=k$

س:- جد البؤرتين والرأسين والقطبين وطول ومعادلة كل من المحورين للقطع الناقص ثم جد قيمة e

$$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{25}=1$$

Solution :

$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1 \rightarrow (h\,,k)=(2\,,1)$

$a^2=25 \ \rightarrow a=5 \ \rightarrow \ 2a=10$ المحور طول الكبير

$b^2=9 \ \rightarrow \ b=3 \ \rightarrow \ 2a=10$ وحده طول المحور الصغير

$c^2=a^2-b^2=25-9=16 \ \rightarrow \ c=4$

$F_1(h\,,c+k)=(2,5)\ ,\ F_2(h\,,-c+k)=(2\,,-3)$

$V_2(h\,,a+k)=(2,6)\,,\ V_2(h\,,-a+k)=(2\,,-4)$

معادلة المحور الكبير $x=2$, ومعادلة المحور الصغير $y=1$

$e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}<1$

==

$\frac{(x-2)^2}{100}+\frac{(y-3)^2}{36}=1$,

المركز $(h,k)=(2,3)$

$a^2=100 \rightarrow a=10$ ، $b^2=36 \rightarrow b=6 \rightarrow c^2=100-36=64 , c=8$

$F_1(c+h , k)=(10,3)$, $F_2(-c+h , k)=(-6 , 3)$

$V_1(a+h , k)=(12,3)$, $V_2(-a+h , k)=(-8 , 3)$

$M_1(h , b+k)=(2,9)$, $M_2(h , -b+k)=(2 , -3)$

==

ملاحظة

لتحويل معادلة القطع الناقص او الزائد الى الصرة القياسية

1. نجعل الحد الثابت في الطرف الايسر والمتغير التربيعي وقرينه في الطرف الأيمن .
2. نستخرج العامل المشترك لجعل معامل y^2 . x^2 يساوي واحد.
3. نكتب الطرف الايسرعلى شكل مربع كامل بإضافة مربع نصف معامل y , x.
4. قسمة المعادلة على الطرف الأيمن اذا كان لا يساوي واحد.
5. في حالة عدم وجود y , x نكتب $x^2=(x-0)^2$ or $y^2=(y-0)^2$

س: عين البؤرتين والراسين والقطبين وطول ومعادلة كل من المحورين للقطع الناقص

$9x^2+4y^2+36x-40y+100=0$

Solution :

$9x^2+36x+4y^2-40y=-100$

$9(x^2+4x)+4(y^2-10y)=-100$

$9(x^2+4x+4)+4(y^2-10y+25)=-100+36+100$

$9(x+2)^2+4(y-5)^2=36 \quad \div(36)$

$$\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{(y-5)^2}{9}=1$$

$h=-2$, $k=5 \rightarrow (h,k)=(-2,5)$, $c^2=5 \rightarrow c=\sqrt{5}$

$F_1(h , c+k)=(-2 , \sqrt{5}+5)$, $F_2(h , -c+k)=(-2 , -\sqrt{5}+5)$, $a=3$, $b=2$

$V_1(h , a+k)=(-2 , 8)$, $v_2(h , -a+k)=(2,5)$ الراسان

$M_1(b+h , k)=(0 , 5)$, $M_2(-b+h , k)=(-4,5)$ القطبان

==

س: عين البؤرتين والراسين والقطبين وطول ومعادلة كل من المحورين للقطع الناقص

1) $25x^2 + 9y^2 - 100x + 54y - 44 = 0$

Solution :

$25x^2 - 100x + 9y^2 + 54y = 44$

$25(x^2 - 4x + 4) + 9(y^2 + 6y + 9) = 44 + 100 - 81$

$25(x-2)^2 + 9(y+3)^2 = 225$

$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{25} = 1 \rightarrow h = 2 , k = -3 \quad \rightarrow (h , k) = (2, -3)$

$a^{2=}25 \rightarrow a = 5 \quad \rightarrow 2a = 10$ طول المحور الكبير

$b^2 = 9 \quad \rightarrow b = 3 \rightarrow 2b = 6$ طول المحور الصغير

$c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow c^2 = 16 \qquad \rightarrow c = 4$

===

2. $9x^2 + 16y^2 - 72x - 96y + 144 = 0$

Solution :

$9x^2 - 72x + 16y^2 - 96y = -144$

$9(x^2 - 8x) + 16(y^2 - 6y) = -144$

$9(x^2 - 8x + 16) + 16(y^2 - 6y + 9) = -144 + 144 + 144$

$9(x-4)^2 \quad + 16(y-3)^2 = 144 \qquad \div (144)$

$\frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1 \qquad \rightarrow (h , k) = (4 , 3)$ *

$a^2 = 16 \rightarrow a = 4 \quad , \quad b^2 = 9 \rightarrow b = 3 \quad , \quad c^2 = 7 \rightarrow c = \sqrt{7}$

2a =8 طول المحور الكبير , $2b = 6$ طول المحور الصغير

$c^2 = 16 - 9 = 7 \quad \rightarrow c = \pm\sqrt{7}$

$F_1(c+h ,k)=(\sqrt{7} + 4 , 3)$, $F_2(-c + h,k) = (-\sqrt{7} + 4, 3)$

$V_1(a+h ,k)=(8 ,3)$, $v_2(-a + h ,k) = (0 , 3)$

===

نماذج من الأسئلة الوزارية للقطع الناقص

س1/ جد معادلة القطع الناقص الذي احدى بؤرتيه تبعد عن نهايتي محوره الكبير بالعددين 1 , 5 على الترتيب وبؤرتاه تعقان
على محور الصادات ومركزه نقطة الاصل ؟

س2/ النقطة $(2, \frac{1}{3})$ تنتمي الى القطع المكافئ الذي راسه نقطة الاصل وبؤرته تنتمي الى محور السينات والتي هي احدى بؤرتي القطع الناقص الذي مركزة نقطة الاصل والنسبة بين طولي محوريه $\frac{5}{4}$ جد معادلة القطع المكافئ و الناقص ؟ 1999/د

س3/ النقطة $(2, \frac{1}{3})$ تنتمي الى القطع المكافئ الذي راسه نقطة الاصل وبؤرته تنتمي الى محور السينات والتي هي احدى
بؤرتي القطع الناقص الذي مركزة نقطة الاصل والنسبة بين طولي محوريه $\frac{4}{5}$ جد معادلة القطع المكافئ و الناقص ؟

س4/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه على محور السينات و المسافة بين بؤرتيه تساوي 8 وحدات
ومجموع طولي محوريه يساوي 16 وحدة ؟
2002/د1

س5/ قطع ناقص معادلة $x^2 + 4y^2 = 4$ جد طول محوريه واحداثيي رأسيه وبؤرتيه ؟
2003/د1

س6/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $x^2 = 24y$ ومجموع طولي
محورية = 4 وحدة ؟ 2004/د
2015/د2 +1

س7/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل و بؤرتاه على محور السينات و المسافة بين البؤرتين (12) وحدات .
والفرق بين طولي المحورين يساوي (4) وحدة ؟
2004 تمهيدي

س8/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل و بؤرتاه على محور السينات و المسافة بين البؤرتين (6) وحدات .
والفرق بين طولي المحورين يساوي (2) وحدة ؟
2005/د1

س9/ لتكن $x^2 - 12y = 0$ و $x^2 + 12y = 0$ معادلتي قطعين مكافئين جد بؤرة كل منهما ومعادلة دليله ثم جد معادلة القطع
الناقص الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطعين المكافئين وطول محوره الصغير يساوي 10 وحدات ؟
2005/د2

س10/ جد معادلة القطع الناقص الذي احدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $x^2 = -8y$ و طول محوره الكبير يساوي ثلاثة امثال
طول محورة الصغير ؟
2010/تمهيدي

س11/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل و ينطبق محوره على المحورين الاحداثيين ويمر ببؤرة
القطع المكافئ $y^2 - 16x = 0$ ومساحة منطقة القطع الناقص تساوي 20 π وحدة مساحة ؟
2010/د1

س12/ قطع ناقص رأساه (± 5 , 0) واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ الذي رأسه نقطه الاصل والمار دليله بالنقطة
(- 3 , 4) جد معادلة القطعين المكافئ والناقص ؟
2012

س13/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل و ينطبق محوره على المحورين الاحداثيين ويقطع من محور
السينات جزءاً طوله 8 وحدات ومساحة منطقته 24 π وحدة مساحة ؟
2012/د2

س14/ جسر على شكل نصف قطع ناقص . المسافة بين نهايتي قاعدته 24m وارتفاعه 9m جد ارتفاع الجسر عند
النقطة التي تبعد عن بدايته 6m ؟ 2014
تمهيدي/

س15/ اذا كانت $e + id = \frac{4+2i}{1-i}$ جد معادلة القطع الناقص الذي احدى بؤرتيه (0 , d) و طول محوره الكبير يساوي
$2\,\|e + id\|$ ؟
2014/د4 خاص

س16/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه على محور الصادات ومساحة منطقته 32 π وحدة مساحة
والنسبة بين طولي المحورين يساوي تساوي $\frac{1}{2}$ ؟
2015/د2

س17/ جد مساحة القطع الناقص الذي بؤرتاه من نقاط المحور الصادي والذي يقطع القطع المكافئ $8x^2 + 8y = 0$ في نقطتين
احداثيهما الصادي هو (2 -) والنسبة بين طولي المحورين يساوي تساوي $\frac{1}{2}$ ؟

س18/ ABC مثلث فيه A(0 , 4) , B(0 , - 4) وان A , B بؤرتان لقطع ناقص C من نقطه فاذا كان محيط المثلث 20π وحدة
طول فجد معادلة القطع الناقص ؟

===

التعريف

قانون التعريف للقطع الناقص اذا كانت البؤرتان او الرأسان على محور السينات :

$$PF1 + PF2 = 2a$$

$$\sqrt{(x-P)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x+P)^2+(y-0)^2}=2a$$

قانون التعريف للقطع الناقص اذا كانت البؤرتان او الرأسان على محور الصادات :

$$PF1 + PF2 = 2a$$

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2}+\sqrt{(x-0)^2+(y+p)^2}=2a$$

س :- باستخدام التعريف جد معادلة القطع الناقص اذا علم ان بؤرتاه هي : F1(- 2 , 0) , F2 (2 , 0) و العدد الثابت = 6 ؟

Solution :

$$PF1 + PF2 = 2a$$

$$\sqrt{(x-P)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x+P)^2+(y-0)^2}=2a$$

$$\sqrt{(x-2)^2+y^2}+\sqrt{(x+2)^2+y^2}=6$$

$$\sqrt{(x-2)^2+y^2}=6-\sqrt{(x+2)^2+y^2}$$ بتربيع الطرفين

$$(x-2)^2+y^2=36-12\sqrt{(x+2)^2+y^2}+(x+2)^2+y^2$$

$$x^2-4x+4+y^2=36-12\sqrt{(x+2)^2+y^2}+x^2+4x+4+y^2$$

$$-4x-4x-36=-12\sqrt{(x+2)^2+y^2}$$

$$-8x-36=-12\sqrt{x^2+4x+4+y^2} \qquad (\div -4)$$

$$2x+9=3\sqrt{x^2+4x+4+y^2}$$ بالتربيع

$$4x^2+36x+81=9(x^2+4x+4+y^2)$$

$$4x^2+36x+81=9x^2+36x+36+9y^2$$

$$9x^2+9y^2-4x^2=81-36 \quad \rightarrow 5x^2+9y^2=45 \qquad \div 45$$

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$$

س :- باستخدام التعريف جد معادلة القطع الناقص اذا علم ان بؤرتاه هي : F1(0 , - 2) , F2 (0 , 2)
ورأساه (0 , ± 3) و مركزه نقطة الاصل ؟

Solution :

$$PF1 + PF2 = 2a$$

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2}+\sqrt{(x-0)^2+(y+p)^2}=2a$$

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x+0)^2+(y+2)^2}=2(3)$$

$$\sqrt{x^2+(y-2)^2}+\sqrt{x^2+(y+2)^2}=6$$

$$\sqrt{x^2+(y-2)^2}=6-\sqrt{x^2+(y+2)^2}$$ بتربيع الطرفين

$$x^2+(y-2)^2=36-12\sqrt{x^2+(y+2)^2}+x^2+y^2+4y+4$$

$$x^2+y^2-4y+4=36-12\sqrt{x^2+y^2+4y+4}+x^2+y^2+4y+4$$

$$-4y-4y-36=-12\sqrt{x^2+y^2+4y+4}$$

$$-8y-36=-12\sqrt{x^2+y^2+4y+4} \quad (\div -4)$$

$$2y+9=3\sqrt{x^2+y^2+4y+4}$$ بالتربيع

$$4y^2+36y+81=9(x^2+y^2+4y+4)$$

$$4y^2+36y+81=9x^2+9y^2+36y+36$$

$$9x^2+9y^2-4y^2=81-36 \quad \to 9x^2+5y^2=45 \qquad \div 45$$

$$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$$

س :- باستخدام التعريف جد معادلة القطع الناقص اذا علم ان المسافة بين البؤرتين = 6 وحدات و العدد الثابت = 10 وحدات والبؤرتان تقعان على محور السينات و مركزه نقطة الاصل ؟

Solution :

$2c = 6 \quad c = 3$

$p = 3$

$\text{PF1} + \text{PF2} = 2\text{a}$

$$\sqrt{(x-\text{P})^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+\text{P})^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-3)^2 + y^2} + \sqrt{(x+3)^2 + y^2} = 10$$

$$\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 10 - \sqrt{(x+3)^2 + y^2}$$ بتربيع الطرفين

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 = 100 - 20\sqrt{(x+3)^2 + y^2} + x^2 + 6x + 9 + y^2$$

$$-6x - 6x - 100 = -20\sqrt{(x+3)^2 + y^2}$$

$$-12x - 100 = -20\sqrt{x^2 + 6x + 9 + y^2} \qquad (\div -4)$$

$$3x + 25 = 5\sqrt{x^2 + 6x + 9 + y^2}$$ بالتربيع

$$9x^2 + 150x + 625 = 25(x^2 + 6x + 9 + y^2)$$

$$9x^2 + 150x + 625 = 25x^2 + 150x + 225 + 25y^2$$

$$25x^2 + 25y^2 - 9x^2 = 625 - 225 \rightarrow 16x^2 + 25y^2 = 400 \qquad \div 400$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

القطع الزائد : هـــو مجموعة من النقاط في المستوي التي تكون القيمة المطلقة لفرق بعدي اي منها عــن نـقـطـتـين ثـابـتـين ((الـبـؤرتـين)) يـســاوي عـــدد ثـــابـت ($2a$) .

حالات القطع الزائد

1) اذا وقع القطع الزائد على محور السينات فـــأن :

a) معادلته القياسية هي :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

b) بؤرة القطع الزائد لمحور السينات هي : F1(c , 0) , F2(- c , 0)

C) رأسا المحور الحقيقي للقطع الزائد على السينات هي : $v1(a , 0)$, $v2(-a , 0)$

d) رأسا المحور التخيلي (المرافق) للقطع الزائد على محور السينات هي : b1 (0 , b) ,b2 (0 , - b)

2) اذا وقع القطع الزائد على محور الصادات فـــأن :

a) معادلته القياسية هي :

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

b) بؤرة القطع الزائد لمحور الصادات هي : F1(0 , c) , F2(0 , - c)

C) رأسا المحور الحقيقي للقطع الزائد على محور الصادات هي : $v1(0 , a)$, $v2(0 , -a)$

d) رأسا المحور التخيلي (المرافق) للقطع الزائد على محور الصادات هي : b1 (b , 0) ,b2 (- b , 0)

مــــلاحـــظات و قوانين حـــول القطع الزائد

1) يرمز لطول المحور الحقيقي بالرمز a و قانونه هو :

طول المحور الحقيقي = $2a$

2) يرمز لطول المحور التخيلي (المرافق) بالرمز b و قانونه هو :

طول المحور (المرافق) التخيلي = 2b

3) يرمز للمسافة بين البؤرتين بالرمز c و قانونه هو :

المسافة بين البؤرتين = $2c$

6) قانون النسبة بين المحورين هو :

النسبة بين المحورين = $\frac{2a}{2b}$

7) قانون الفرق بين طولي المحورين هو :

قانون الفرق بين طولي المحورين = $2a-2b$

8) يرمز للاختلاف المركزي للقطع الزائد بالرمز e وقانونه هو :

$e=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$ (or) $e=\frac{c}{a}$

9) يرمز للبؤرة c للقطع الزائد والعلاقة بينها وبين ba , هي :

$c^2=a^2+b^2$

☹ يمكن تحديد موقع القطع الزائد على محور السينات او محور الصادات من خلال اشارة المعادلة القطع الزائد

ملاحظه مهمه : الاختلاف المركزي للقطع الزائد دائما اكبر من واحد $e > 1$

(ملاحظات)

1) اذا كانت البورة بالشكل التالي (عدد , 0) F فان القطع يقع على محور السينات .

2) اذا كانت البورة بالشكل التالي (0 , عدد) F فان القطع يقع على محور الصادات .

3) اكبر قيمة للقطع الزائد هي c بينما في القطع الناقص هي a .

3) كلمة يمس تعني الرأس اي ان $p = a$

4) الاختلاف المركزي للقطع الزائد اكبر من واحد e اما في القطع الناقص اقل من واحد .

س :- عين كل من البؤرتين و الرأسين والقطبين ؟ ثم طول كل من المحورين الاختلاف المركزي للقطع الزائد $9x^2 - 4y^2 = 36$ ؟

Solution :

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$a^2 = 4 \quad \to a = 2$

$b^2 = 9 \quad \to b = 3$

$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = 4 + 9$

$c^2 = 13$

$c = \sqrt{13}$

$F1(c , 0) , F2(- c , 0)$

$F1(\sqrt{13} , 0) \quad , F2(- \sqrt{13} , 0)$ البؤرتان هما :

$v1(a , 0) , v2(- a , 0)$

$v1(2 , 0) \quad , v2(- 2 , 0)$ الرأسان هما :

$b1(0 , b) , b2(0 , - b)$

$b1(0 , 3) , b2(0 , - 3)$ القطبان هما :

$e = \frac{c}{a}$

$e = \frac{\sqrt{13}}{2}$ الاختلاف المركزي

$2a = 2 (2) = 4$ طول المحور الحقيقي

$2b = 2 (3) = 6$ طول المحور التخيلي (المرافق)

س :- جد البؤرتين و الرأسين والقطبين و المركز وطول كل من المحورين الاختلاف المركزي للقطع الزائد $9y^2 - 16x^2 = 576$ ؟

Solution :

$$\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{36} = 1$$

$a^2 = 64 \quad \rightarrow a = 8$
$b^2 = 36 \quad \rightarrow b = 6$
$c^2 = a^2 + b^2$
$c^2 = 64 + 36$
$c^2 = 100$
$c = 10$
$F1(0, c), F2(0, -c)$
البؤرتان هما : $F1(0, 10), F2(0, -10)$
$v1(0, a), v2(0, -a)$
الرأسان هما : $v1(0, 8), v2(0, -8)$

$b1(b, 0), b2(-b, 0)$
القطبان هما : $b1(6, 0), b2(-6, 0)$
$e = \frac{c}{a}$

الاختلاف المركز $e = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$
طـــــول المحور الحقيقي $2a = 2(8) = 16$
طول المحور التخيلي (المرافق) $2b = 2(6) = 12$

س :- عين كل من البؤرتين و الرأسين والقطبين ؟ ثم طول كل من المحورين الاختلاف المركزي للقطع الزائد :

(a $12x^2 - 4y^2 = 48$

Solution :

$12x^2 - 4y^2 = 48 \quad \div 48$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

$a^2 = 4 \quad \rightarrow a = 2$
$b^2 = 12 \quad \rightarrow b = \sqrt{12}$
$c^2 = a^2 + b^2$
$c^2 = 4 + 12$
$c^2 = 16$
$c = 4$

F1(c , 0) , F2(- c , 0)
البؤرتان هما : F1(4 , 0) , F2(- 4 , 0)
v1(a , 0) , v2(- a , 0)
الرأسان هما : v 1(2 , 0) , v2(- 2 , 0)
b1(0 , b) , b2(0 , - b)
القطبان هما : b1(0 , 3) , b2(0 , - 3)
$e = \frac{c}{a}$
طول المحور الحقيقي $2a = 2 (2) = 4$
طول المحور التخيلي (المرافق) $2b = 2 (2\sqrt{3}) = 4\sqrt{3}$

$16x^2 - 9y^2 = 144$ (B

Solution :

$16x^2 - 9y^2 = 144 \qquad \div 144$

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

$a^2 = 9 \quad \rightarrow a = 3$
$b^2 = 16 \quad \rightarrow b = 4$
$c^2 = a^2 + b^2$
$c^2 = 9 + 16$
$c^2 = 25$
$c = 5$
F 1(c , 0) , F2(- c , 0)
البؤرتان هما : F 1(5 , 0) , F2(- 5 , 0)
v 1(3 , 0) , v2(- 3 , 0)
الرأسان هما : v 1(a , 0) , v2(- a , 0)
b 1(0 , b) , b2(0 , - b)
القطبان هما : b 1(0 , 4) , b2(0 , - 4)
طول المحور الحقيقي $2a = 2 (4) = 8$
طول المحور التخيلي (المرافق) $2b = 2 (3) = 6$

الاختلاف المركزي $e = \frac{c}{a}$

$e = \frac{5}{4}$

س :- جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل و بؤرتاه على محور السينات و طول محورة الحقيقي (6) وحدات والاختلاف المركزي (2) ؟

Solution :

$2a = 6$

$a = 3 \quad a^2 = 9$

$e = \frac{c}{a} \quad \rightarrow 2 = \frac{c}{3} \quad \rightarrow c = 6$

$c^2 = a^2 + b^2$

$36 = 9 + b^2$

$b^2 = 36 - 9$

$b^2 = 27$

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$

س :- جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل و طول محورة المرافق (4) وحدات البؤرتان هما النقطتان :

$F1(\ 0 , \sqrt{8}\ ) , F2(\ 0 , - \sqrt{8}\ )$ ؟

Solution :

$2b = 4$

$b = 2 \quad \rightarrow b^2 = 4$

$c = \sqrt{8} \quad \rightarrow c^2 = 8$

$c^2 = a^2 + b^2$

$8 = a^2 + 4$

$a^2 = 8 - 4$

$a^2 = 4$

$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{4} = 1$

==

س: - جد معادلة القطع الزائد اذا كان :

a) البؤرتان هما النقطتان $(\pm 5 , 0)$ و يتقاطع مع محور السينات عند $x = \pm 3$ و مركزه نقطة الاصل .

Solution :

$F(\pm 5 , 0)$

$c = 5 \quad \rightarrow c^2 = 25$

بما ان القطع يتقاطع مع محور السينات والبؤرة تقع على محور السينات لذلك فان قيمة $x = \pm 3$ تمثل قيمة a

$a = 3 \quad \rightarrow a^2 = 9$

$c^2 = a^2 + b^2$

$25 = 9 + b^2$

$b^2 = 25 - 9$

$b^2 = 16$

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$$

b) طول محوره الحقيقي 12 وحده وطول محوره المرافق 10 وحدات وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين ومركزه نقطة الاصل .

Solution :

$2a = 12$

$a = 6 \quad \rightarrow a^2 = 36$

$2b = 10$

$b = 5 \quad \rightarrow b^2 = 25$

$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{25}=1 \qquad , \frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{25}=1$

C) مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه على محور الصادات وطول محوره المرافق $2\sqrt{2}$ والاختلاف المركزي يساوي 3 unit .

Solution :

$2b = 2\sqrt{2}$

$b = \sqrt{2} \quad \rightarrow b^2 = 2$

$e = \frac{c}{a} \quad \rightarrow 3 = \frac{c}{a} \quad \rightarrow c = 3a$

$c^2 = 9a^2$

$c^2 = a^2 + b^2$

$9a^2 = a^2 + 2$

$8a^2 = 2$

$a^2 = \frac{1}{4}$

$\frac{x^2}{\frac{1}{4}}-\frac{y^2}{2}=1 \qquad , \qquad \frac{y^2}{\frac{1}{4}}-\frac{x^2}{2}=1$

س :- قطع زائد طول محوره الحقيقي 6 وحدات و احدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ويمر بالنقطتين

جد معادلة القطع المكافئ الذي مركزه نقطة الاصل ومعادلة القطع الزائد $(1, 2\sqrt{5}), (1, -2\sqrt{5})$
الذي مركزه نقطة الاصل ؟

Solution :

القطع المكافئ يمر بالبؤرتين $(1, 2\sqrt{5}), (1, -2\sqrt{5})$ الذي يقع على محور السينات

نعـوض عـن احدى النقطتين في المعادلة القياسية للقطع المكافئ هــي $y^2 = 4px$

$(2\sqrt{5})^2 = 4p(1)$

$20 = 4p$

$p = 5 = c$ للزائد

$c^2 = 25$

$2a = 6 \quad \rightarrow a = 3 \quad \rightarrow a^2 = 9$

$c^2 = a^2 + b^2$

$25 = 9 + b^2$

$b^2 = 25 - 9$

$b^2 = 16$

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

==

س :- قطع زائد مركزه نقطة الاصل و معادلته $hx^2 - Ly^2 = 90$ و طول محوره الحقيقي $(6\sqrt{2})$
وحدة طول وبؤرتاه تنطبقان

على بؤرتي القطع الناقص الذي معادلته $9x^2 + 16y^2 = 576$ جد قيمتي كل من h , L الحقيقيتين ؟

solution :

$9x^2 + 16y^2 = 576$

$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$

$a^2 = 64$

$b^2 = 36$

$c^2 = a^2 - b^2$

$c^2 = 64 - 36$

$c^2 = 28$

$c = \sqrt{28}$

بما ان بؤرتي القطع الناقص هي بؤرتي القطع الزائد $(\pm\sqrt{28}, 0)$

$c^2 = 28$
$2a = 6\sqrt{2}$
$a = 3\sqrt{2}$
$a^2 = 18$
$28 = 18 + b^2$
$b^2 = 28 - 18$
$b^2 = 10$
$h x^2 - k y^2 = 90$

$$\frac{x^2}{\frac{90}{h}} - \frac{y^2}{\frac{90}{k}} = 1 \quad \rightarrow a^2 = \frac{90}{h} = 18 = \frac{90}{h} \rightarrow h = 5 , b^2 = \frac{90}{k} = 10 = \frac{90}{k} \rightarrow k = 9$$

==

س :- جد المعادلة القياسية للقطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل اذا علمت ان احد رأسيه يبعد عن البؤرتين بالعددين 9 , 1 على الترتيب اذا علمت ان محوراه ينطبقان على المحورين الاحداثيين ؟

$2a = 9 - 1$
$2a = 8 \rightarrow a = 4 \rightarrow a^2 = 16$
$2c = 9 + 1$
$2c = 10 \rightarrow c = 5 \rightarrow c^2 = 25$
$c^2 = a^2 + b^2$
$25 = 16 + b^2$
$b^2 = 25 - 16$
$b^2 = 9$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \quad , \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$$

==

س :- جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه هما بؤرتا القطع الزائد الذي معادلة $x^2 - 3y^2 = 12$

والنسبة بين طولي المحورين تساوي $\frac{5}{3}$ ومركزه نقطة الاصل ؟

Solution :

$(\div 12) \; x^2 - 3y^2 = 12$

$$\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$$

$a^2 = 12$
$b^2 = 4$
$c^2 = a^2 + b^2$
$c^2 = 12 + 4$

$c^2 = 16$

$c = 4$

بؤرتا القطع الزائد هي بؤرتا القطع الناقص $(\pm 4 , 0)$

$$\frac{2a}{2b} = \frac{5}{3} \quad \to 6a = 10b \ \div 2 \ \to a = \frac{5b}{3} \quad \to a^2 = \frac{25b^2}{9}$$

$c^2 = a^2 - b^2$

$$16 = \frac{25b^2}{9} - b^2 \quad , \quad 16 = \frac{25b^2 - 9b^2}{9} \quad \to 16b^2 = 144 \to b^2 = \frac{144}{16} = 9$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

س :- النقطة $P(6 , L)$ تنتمي الى القطع الزائد الذي مركزة نقطة الأصل ومعادلته $x^2 - 3y^2 = 12$ جد قيمة L ؟ ثم جد طول نصف القطر البؤري للقطع المرسوم من الجهة اليمنى من النقطة ؟

Solution :

نعوض عن النقطة $P(6 , L)$ التي تحقق معادلة القطع الزائد $x^2 - 3y^2 = 12$

$(6)^2 - 3L^2 = 12$

$36 - 12 = 3L^2$

$3L^2 = 24$

$L^2 = 8$

$L = \pm\sqrt{8}$

نقطتا القطع الزائد هي : $P(6 , \pm\sqrt{8})$

$$x^2 - 3y^2 = 12 \qquad \div 12$$

$$\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$$

$a^2 = 12$

$b^2 = 4$

$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = 12 + 4$

$c^2 = 16$

$c = 4$

بؤرتا القطع الزائد من الجهة اليمنى هي $(4 , 0)$

س:- جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

ويمس دليل القطع المكافئ الذي معادلة $x^2+12y=0$ ؟

Solution :

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

$a^2=25$
$b^2=9$
$c^2=a^2-b^2$
$c^2=25-9$
$c^2=16$
$c=4$

بؤرتا القطع الناقص هي بؤرتي القطع الزائد $(0,\pm 4)$

$x^2+12y=0$
$x^2=-12y$
$4p=-12 \quad p=-3$
$y=3$ دليل القطع المكافئ هو
$a=3$
$a^2=9$
$c^2=a^2+b^2$
$16=9+b^2$
$b^2=16-9$
$b^2=7$

$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{7}=1$

س:- جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتميان لمحور السينات ومركزة نقطة ومساحة منطقته 7π وحدة مربعه و محيطه يساوي 10π وحدة ؟

Solution :

قانون مساحة القطع الناقص هي : $A=ab\pi$

$7\pi=ab\,\pi$
$7=ab$

$a=\frac{7}{b} \quad \rightarrow a^2=\frac{49}{b^2} \quad \cdots\cdots(1)$

قانون محيط القطع الناقص هي : $P=2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

$10\pi = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

$5 = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ بالتربيع

$25 = \frac{a^2+b^2}{2} \quad \rightarrow a^2 + b^2 = 50$

$\frac{49}{b^2} + b^2 = 50$

$\frac{49+b^4}{b^2} = 50$

$49 + b^4 = 50b^2$

$b^4 - 50b^2 + 49 = 0$

$(b^2 - 49)(b^2 - 1) = 0$

$b^2 - 49 = 0$

$b^2 = 49$ يهمل

$b^2 - 1 = 0$

$b^2 = 1 \quad \rightarrow b = 1$

نعوض عن قيم b في معادلة(1) لكي نجد قيم a

$a^2 = \frac{49}{1} = 49$

$\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{1} = 1$

س:- قطع ناقص مركزه نقطة الاصل و قطع زائد نقطة تقاطع محورية نقطة الاصل . كل منهما يمر ببؤرة الاخر فاذا كانت معادلة

القطع الناقص هي $9x^2 + 25y^2 = 225$ فجد كلا مما يأتي :

a)مساحة القطع الناقص b) محيط القطع الناقص c) معادلة القطع الزائد d) الاختلاف المركزي لكل منهما .

Solution :

$9x^2 + 25y^2 = 225$

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

$a^2 = 25 \quad \rightarrow a = 5$

$b^2 = 9 \quad \rightarrow b = 3$

قانون مساحة القطع الناقص هي :

$A = ab\pi$

$A = (5)(3)\pi$

$A = 15\pi$

قانون محيط القطع الناقص هي : $P = 2\pi\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$

$P = 2\pi\sqrt{\frac{25 + 9}{2}}$

$P = 2\pi\sqrt{\frac{34}{2}}$

$p = 2\sqrt{17}\pi$

$c^2 = a^2 - b^2$

$c^2 = 25 - 9$

$c^2 = 16$

$c = 4$

بؤرتا القطع الناقص هما رأسا القطع الزائد $(\pm 4 , 0)$

رأسا القطع الناقص هما بورتا القطع الزائد $(\pm 5 , 0)$

$a = 4 \rightarrow a^2 = 16$

$c = 5 \rightarrow c^2 = 25$

$c^2 = a^2 + b^2$

$25 = 16 + b^2$

$b^2 = 25 - 16$

$b^2 = 9$

$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

$e = \frac{c}{a}$

$e = \frac{4}{5}$ الاختلاف المركزي للقطع الناقص

$e = \frac{5}{4}$ الاختلاف المركزي للقطع الزائد

اسئلة حول القطع الزائد

س1/ جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه النقطتان (0 , 6 ±) ويتقاطع مع محور السينات عند $x = \pm 4$ ومركزه نقطة الاصل ؟

س2/ جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{35} + \frac{y^2}{20} = 1$ واحدى رأسيه بؤرة القطع المكافئ

$y^2 + 8x = 0$ ؟

1997/ د2

س3/ جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص $3x^2 + 5y^2 = 120$ النسبة بين طولي

محوره الحقيقي والبعد بين بؤرتيه كنسبة $\frac{1}{2}$ ؟

2001/ د1

س4/ جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما راسا القطع الناقص $x^2 + 9y^2 = 36$ النسبة بين طولي محوره

الحقيقي والبعد بين بؤرتيه كنسبة $\frac{1}{2}$ و ينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين ؟

2002/ د2

س5/ جد معادلة القطع الزائد الذي يمر ببؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$ النسبة بين البعد بين بؤرتيه وطول محوره المرافق كنسبة $\frac{5}{4}$ ؟

2003/ د2

س6/ جد معادلة القطع المخروطي الذي محوراه ببؤرتي هما المحورين الاحداثيين واحدى بؤرتيه (0 , 5 -) واحد راسيه (0 , 3) ؟

2003/ د2

س7/ جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطعين المكافئين $x^2 = -20y$, $x^2 = 20y$,
وطول محوره المرافق 8 وحدات ؟

2005/ د1

س8/ جد معادلة القطع الزائد الذي احدى بؤرتيه هي نقطة تقاطع المستقيم $2x - y = 8$ مع محور السينات وطول
محوره المرافق 4 وحدات ؟

2007

===

انسحاب المحاور للقطع

1. عند انسحاب مركز القطع بمقدار (h) من الوحدات على محور السينات وبقدار (k) من الوحدات على محور الصادات والمحور الحقيقي الذي تقع عليه البؤرتان والرأسان يوازي المحور السيني فأن المعادلة

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

المركز o (h , k)

البؤرتان هما (−c+h , k) , (c+h , k)

الرأسان هما (−a+h , k) , (a+h , k)

طول المحور الحقيقي =2a

طول المحور المرافق =2b

معادلة المحور المرافق x=h والحقيقي y=k

---

2) عند انسحاب مركز القطع بمقدار h من الوحدات على محور الصادات وبمقدار k من الوحدات على محور السينات والمحور الحقيقي الذي تقع عليه البؤرتان والرأسان يوازي المحور الصادي فأن المعادلة هي

$$\frac{(y-h)^2}{a^2}-\frac{(x-k)^2}{b^2}=1$$

البؤرتان هما (h ,−c+k) , (h, c+k)

الرأسان هما (h ,−a+k) , (h, a+k)

طول المحور الحقيقي =2a

طول المحور المرافق =2b

معادلة المحور المرافق y=k

معادلة المحور الحقيقي x=h

س: جد احداثيا المركز والبؤرتين والراسين وطول المحورين والاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي

$$a)\quad \frac{(x+2)^2}{9}-\frac{(y-1)^2}{4}=1 \rightarrow \frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

طول المحور الحقيقي $a^2=9 \rightarrow a=3 \rightarrow 2a=6$

طول المحور المرافق $b^2=4 \rightarrow b=2 \rightarrow 2b=4$

المركز $h=-2, k=1 \quad (h,k)=(-2,1)$

$c^2=a^2+b^2=9=4=13 \quad c=\sqrt{13}$

المحور الحقيقي يوازي محور السينات

البؤرتان هما $F_1(c+h,k)=(\sqrt{13}-2, 1)$, $F_2(-c+h,k)=(-\sqrt{13}-2,1)$

الراسان هما $V_1(a+h,k)=(1 , 1)$ $V_2(-a+h,k)=(-5 , 1)$

b. $(y+1)^2-4(x-1)^2=8)\div(8)$

$$\frac{(y+1)^2}{4}-\frac{(x-1)^2}{2}=1$$

$a^2=4\to a=2\ \to 2a=4$ طول المحور الحقيقي

$b^2=2\ \to b=\sqrt{2}\to 2b=2\sqrt{2}$ طول المحور المرافق

$c^2=\ a^2+b^2\ \to c^2=4+2=6\qquad \to c=\sqrt{6}$

$f_1(h,c+k)=f(1,\sqrt{6}-1)f_2(h,-c+k)=f(1,-\sqrt{6}-1)$ البؤرتان

$v,(h,a+k)=(1,2-1)=(1,1),v_2=(1,-1-2)=(1,-3)$

خطوات تحويل معادلة القطع الزائد او الناقص المسحوب الى الصورة القياسية

1. نجعل الحد الثابت في الطرف الايمن والمتغير التربيعي وقرينه في الطرف الأيسر .
2. نستخرج العامل المشترك لجعل معامل y^2 . x^2 يساوي واحد.
3. نكتب الطرف الايسرعلى شكل مربع كامل بإضافة مربع نصف معامل y , x.
4. قسمة المعادلة على الطرف الأيمن اذا كان لا يساوي واحد.
5. في حالة عدم وجود y , x نكتب $x^2=(x-0)^2\ or\ y^2=(y-0)^2$

==

س:- عين كل من البؤرتين والرأسين والقطبين ثم جد طول كل من المحورين والاختلاف المركزي للقطع الزائد

a) $16x^2-160x-9y^2+18y=185$

Solution :

$16(x^2+10x)-9(y^2-2y)=185$

$16(x^2+10x+25)-9(y^2-2y+1)=185+400-9$

$16(x+5)^2-9\,(y-1)^2=576$

$$\frac{(x+5)^2}{36}-\frac{(y-1)^2}{64}=1\qquad\qquad \frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}$$

$a^2=36\ \ \to a=6\ \ \to 2a=12$ وحده طول المحور الحقيقي

$b^2=64\ \ \to b=8\ \ \to 2b=16$ وحده طول المحور المرافق

$c^2=a^2-b^2=36+64=100\ \ \to c=10$

(h , k) = (−5 , 1) المركز

F_1(c+h , k) = (10−5 , 1)=(5, 1) البؤرتان

F_2(−c+h , k) = (−10−5 , 1)=(−15, 1)

V_1(a+h , k) = (6+−5 , 1) = (1 , 1) الرأسان

V_2(−a+h , k) = (−6+−5 , 1) = (−1 , 1)

b) $9y^2 - 4x^2 + 36y - 40x - 100 = 0$

التعريف

باستخدام التعريف نجد معادلة القطع الــزائـــد

قانون التعريف للقطع الـــزائــــد اذا كانت البؤرتان او الرأسان على محور السينات :

$PF1 - PF2 = 2a$

$\sqrt{(x-P)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x+P)^2 + (y-0)^2} = 2a$

قانون التعريف للقطع الــزائــد اذا كانت البؤرتان او الرأسان على محور الصادات :

$PF1 - PF2 = 2a$

$\sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} - \sqrt{(x-0)^2 + (y+p)^2} = 2a$

س:- باستخدام التعريف جد معادلة القطع الزائد اذا علم ان بؤرتاه هي F1(- 5 , 0) , F2(5 , 0) ورأساه (- 3 , 0) , (3 , 0) ؟

Solution :

$PF1 - PF2 = 2a$

$\sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x+p)^2 + (y-0)^2} = 2a$

$\sqrt{(x-5)^2 + y^2} - \sqrt{(x+5)^2 + y^2} = 2(3)$

$\sqrt{(x-5)^2 + y^2} = 6 + \sqrt{(x+5)^2 + y^2}$ بتربيع الطرفين

$$(x-5)^2+y^2=36+12\sqrt{(x+5)^2+y^2}+(x+5)^2+y^2$$

$$x^2-10x+25+y^2=36+12\sqrt{(x+5)^2+y^2}+x^2+10x+25+y^2$$

$$-10x-10x-36=12\sqrt{(x+5)^2+y^2}$$

$$-20x-36=12\sqrt{(x+5)^2+y^2}$$ (بالقسمة على 4)

$$-5x-9=3\sqrt{x^2+10x+25+y^2}$$ بالتربيع

$$25x^2+90x+81=9(x^2+10x+25+y^2)$$

$$25x^2+90x+81=9x^2+90x+225+9y^2$$

$$25x^2-9x^2-9y^2=225-81$$

$$16x^2-9y^2=144 \qquad \div 144$$

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$$

س :- باستخدام التعريف جد معادلة القطع الزائد اذا علمت ان بؤرتاه هي :
$F1(-2\sqrt{2},0)$, $F2(2\sqrt{2},0)$ وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين و القيمة المطلقة لفرق بعدي اي نقطه من نقاطة عن البؤرتين تساوي 4 وحدات ؟

Solution :

من خلال بؤرتاه القطع يقع على محور السينات : $F1(-2\sqrt{2},0)$, $F2(2\sqrt{2},0)$

$$PF1-PF2=2a$$

$$\sqrt{(x-p)^2+(y-0)^2}-\sqrt{(x+p)^2+(y-0)^2}=2a$$

$$\sqrt{(x-2\sqrt{2})^2+y^2}-\sqrt{(x+2\sqrt{2})^2+y^2}=\pm4$$

$$\sqrt{(x-2\sqrt{2})^2+y^2}=\pm4+\sqrt{(x+2\sqrt{2})^2+y^2}$$ بتربيع الطرفين

$$(x-2\sqrt{2})^2+y^2=16+8\sqrt{(x+2\sqrt{2})^2+y^2}+(x+2\sqrt{2})^2+y^2$$

$$x^2-4\sqrt{2}x+8+y^2=16+8\sqrt{(x+2\sqrt{2})^2+y^2}+x^2+4\sqrt{2}x+8+y^2$$

$$-4\sqrt{2}\,x - 4\sqrt{2}x - 16 = 8\sqrt{(x+2\sqrt{2})^2 + y^2}$$

$$-8\sqrt{2}x - 16 = 8\sqrt{(x+2\sqrt{2})^2 + y^2}$$ (بالقسمة على 4)

$$-2\sqrt{2}x - 4 = 2\sqrt{x^2 + 4\sqrt{2}x + 8 + y^2}$$ بالتربيع

$$8x^2 + 16\sqrt{2}x + 16 = 4(x^2 + 4\sqrt{2}x + 8 + y^2)$$

$$8x^2 + 16\sqrt{2}x + 16 = 4x^2 + 16\sqrt{2}x + 32 + 4y^2$$

$$8x^2 - 4x^2 - 4y^2 = 32 - 16$$

$$4x^2 - 4y^2 = 16 \qquad \div 16$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$$

اسئلة اضافية حول القطوع

س1:- جد معادلة القطع والناقص اذا كان كل منهما يمر ببؤرتي الأخر وكلاهما تقعان على محور السينات المحور الكبير يساوي $6\sqrt{2}$ يساوي الحقيقي المحور وطول 6وحدة طول

Sol :

س2:- قطع ناقص مساحته15π وقطع زائد وبعده البؤري 10 يمران ببؤرة القطع المكافئ $y^2 = 12x$ ويمسان دليله فجد معادلة كل من القطع الناقص والزائد ؟

Sol :

==